泛 函 分 析

孙善利　纪友清

吉林大学数学研究所

目　录

第一章　拓扑学引论

I.1 拓扑空间

定义 I.1.1 设 X 是一个非空集合. X 的一族子集 $\mathcal{T}$ 具有如下的性质:
(a) $\mathcal{T}$ 封闭于有限交运算, 即若 $\{A_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{T}$, 则 $\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{T}$, 其中 n 是任意的自然数;
(b) $\mathcal{T}$ 封闭于任意并的运算, 即若 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{T}$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \in \mathcal{T}$, 其中 Λ 是任意的指标集;
(c) $\emptyset,\ X \in \mathcal{T}$;
则称 $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ 为 拓扑空间 . 不发生混淆时就说 X 是拓扑空间, $\mathcal{T}$ 称为 X 上的拓扑, $\mathcal{T}$ 中的元称为 开集 , 开集的余集称为 闭集 .

例如 $\mathbb{R}$ 上的全体开集构成之集合就是 $\mathbb{R}$ 上的拓扑 $\mathcal{T}$. 一般的度量空间都是拓扑空间, 其上的拓扑就是度量定义的全体开集组成的. 事实上拓扑的概念正是度量空间的开集抽象出来的. 度量空间 X 的一个重要的性质是, $\forall x, y \in X, x \neq y$, 必存在包含 x, y 的开集 U_x, U_y , 使 $U_x \cap U_y = \emptyset$. 一般的拓扑空间不具备这样好的性质, 因而需要给它特殊的名称.

定义 I.1.2 拓扑空间 X 称为 Hausdorff 空间(或 T_2 空间) , 如果对于任何相异 $x, y \in X$, 必存在开集 G_x, G_y , 使得 $x \in G_x, y \in G_y$ 且 $G_x \cap G_y = \emptyset$.

同一个集合 X 上, 可以有不同的拓扑, 其中有两个拓扑是极端情形. 一个是由 X 的所有子集组成的拓扑, 即所谓离散拓扑; 另一个是只由两个元素即 $\emptyset, X$ 组成得拓扑 $\{\emptyset, X\}$, 称为平庸拓扑.

定义 I.1.3 设 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 是 X 上两个拓扑, 如果 $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, 则称 $\mathcal{T}_1$ 弱于 $\mathcal{T}_2$(或 $\mathcal{T}_2$ 强于 $\mathcal{T}_1$) , 记作 $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$(或 $\mathcal{T}_2 \geq \mathcal{T}_1$) .

显然, 非空集合 X 上的任何拓扑都弱于离散拓扑, 而强于平庸拓扑.

定义 I.1.4 设 $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ 是一个拓扑空间, $A \subset X$. 令 $\mathcal{T}_A = \{G \cap A; G \in \mathcal{T}\}$, 则 $\mathcal{T}_A$ 是 A 上的一个拓扑, 我们称 $\mathcal{T}_A$ 为 A 上的 相对拓扑(或 $\mathcal{T}$ 在 A 上诱导出的拓扑) . $\mathcal{T}_A$ 中元称为 相对开集 .

定义 I.1.5 设 $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ 是一个拓扑空间, 一族开集 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ 称为之 基 , 如果 $\mathcal{T}$ 中的每个开集都能表成 $\mathcal{B}$ 中元之并. 一族开集 $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ 称为 $\mathcal{T}$ 之 次基 , 如果 $\mathcal{T}$ 中每个开集都能表成 $\mathcal{S}$ 中元之有限交的并, 即 $\mathcal{S}$ 中元有限交的全体就是 $\mathcal{T}$ 之一个基.

设 $x \in N$, $N \subset X$ 称为 x 的一个 邻域 , 如果存在开集 U 使得 $x \in U \subset N$. 如果 N 还是开集, 则可称 N 为一个开邻域; 如果 N 是闭集, 则可称之为闭邻域.

设 $x \in X$, x 的一族邻域 $\mathcal{U}$ 称为 x 的 邻域基 , 如果对于 x 的每个邻域 V , 都有 $U \in \mathcal{U}$, 使 $x \in U \subset V$. x 之邻域基记为 $\mathcal{U}(x)$. 一般情况下, x 的邻域基中的元素都取为 x 的开邻域.

在度量空间 $\langle M, \rho\rangle$ 中, 设 $x \in M$, n 是自然数, 令 $N_n = \{\ y \in M; \rho(x, y) < 1/n\}$, 则 $\mathcal{U} = \{N_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 便是的一个 x 可数的邻域基.

给了一个拓扑, 就有拓扑基及拓扑次基. 反之, 给了一个拓扑基或拓扑次基, 也可以确定这个拓扑, 我们常常通过给定拓扑基或拓扑次基的方式来给定拓扑. 同样, 给定每个点的邻域基, 也确定了这个拓扑, 实际中我们也常是这样做的.

有了拓扑就有了邻域，也就可以给出极限及连续的概念.

定义 I.1.6 设是 X 拓扑空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中一个序列，$x \in X$. 如果对 x 的每个邻域 V ，都存在自然数 N ，使当 $n \geq N, x_n \in V$ ，称 $\{x_n\}$ 收敛于 x ，记作 $x_n \to x$(或 $\lim\limits_n x_n = x$) .

定义 I.1.7 设是 $\langle S, \mathcal{T} \rangle$, $\langle T, \mathcal{U} \rangle$ 拓扑空间，映射 $f: S \to T$. 如果对任意 $G \in \mathcal{U}$ ，都有 $f^{-1}(G) \in \mathcal{T}$ ，则称 f 是 连续的 . 如果对任何的 $V \in \mathcal{T}$ ，都有 $f(V) \in \mathcal{U}$ ，则称 f 是 开的 . 如果 f 是双射 (既单射且满射)，而且是连续的开映射，则称 f 是 同胚 .

定理 I.1.1 设 S, T 都是拓扑空间， $f: S \to T$ 是映射，则 f 是连续的当且仅当对 T 中任何闭集 $F, f^{-1}(F)$ 是 S 中的闭集.

证明 必要性. 设 F 是 T 中闭集，则 F^c（表示 F 之余集）是开集，于是由 f 之连续性，$f^{-1}(F^c)$ 是 S 中开集，但 $f^{-1}(F^c) = [f^{-1}(F)]^c$ ，故是 $f^{-1}(F)$ 闭集.

充分性. 对 T 之任何开集 G ，G^c 是 T 中闭集，由假设 $f^{-1}(F)$ 是 S 中闭集，但 $f^{-1}(G^c) = [f^{-1}(G)]^c$. 于是 $f^{-1}(G)$ 是 S 中开集，故 f 是连续的. ◇

I.2 弱拓扑

在上节引进的映射连续性是依赖于拓扑的. 由定义可见，对于连续的映射 $f: \langle S, \mathcal{T} \rangle \to \langle T, \mathcal{U} \rangle$ ，当拓扑 $\mathcal{T}$ 加强为 $\mathcal{T}_1$ 时， f 还是连续的. 但当拓扑 $\mathcal{T}$ 减弱为 $\mathcal{T}_2$ 时， f 未必还连续. 于是可以考虑 S 上使 f 保持连续的最弱拓扑，显然它应为 $\{f^{-1}(U); U \in \mathcal{U}\}$. 若又有映射 $g: S \to \langle T, \mathcal{U} \rangle$ ，则 S 上使 f, g 皆连续的拓扑必须包含

$$\mathcal{S} = \{f^{-1}(U); U \in \mathcal{U}\} \cup \{g^{-1}(U); U \in \mathcal{U}\}.$$

这时 $\mathcal{S}$ 未必是拓扑，但以 $\mathcal{S}$ 为次基的拓扑即为使 f, g 皆连续的最弱拓扑. 这启发我们引进如下重要概念.

定义 I.2.1 设 $\mathcal{K}$ 是从集合 S 到拓扑空间 $\langle T, \mathcal{U} \rangle$ 的一族映射. S 上的使所有 $f \in \mathcal{K}$ 皆连续的拓扑中最弱者，称为 S 上由 $\mathcal{K}$ 决定的弱拓扑(或 $\mathcal{K}-$ 弱拓扑) .

命题 I.2.1 设 $\mathcal{K}$ 是从 S 到 $\langle T, \mathcal{U} \rangle$ 的一族映射，则

(a) 以 $\{f^{-1}(U); f \in \mathcal{K}, U \in \mathcal{U}\}$ 为次基的拓扑即为 $\mathcal{K}-$ 弱拓扑.

(b) 于任何 $x_0 \in S, f \in \mathcal{K}, \mathcal{U}(f(x_0))$ 表示 $f(x_0)$ 之邻域基，则形如 $f^{-1}(U)$ (其中 $f \in \mathcal{K}, U \in \mathcal{U}(f(x_0))$) 的元之有限交的全体，即形如 $\bigcap\limits_{j=1}^{n} f_j^{-1}(U_j)$（其中 $f_j \in \mathcal{K}, U_j \in \mathcal{U}(f_j(x_0))$ ）的集合全体，就是 $\mathcal{K}-$ 弱拓扑在 x_0 的邻域基.

证明 (a) 设 $\mathcal{K}-$ 弱拓扑为 $\mathcal{T}_1$ ，而以 $\{f^{-1}(U); f \in \mathcal{K}, U \in \mathcal{U}\}$ 为次基的拓扑为 $\mathcal{T}_2$. 由假设， $\forall f \in \mathcal{K}$ 关于 $\mathcal{T}_1$ 连续，当 $U \in \mathcal{U}, f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$. 故 $\{f^{-1}(U); f \in \mathcal{K}, U \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{T}_1$ ，从而 $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$. 另一方面，由 $\mathcal{T}_2$ 定义，每个 $f \in \mathcal{K}$ 关于 $\mathcal{T}_2$ 连续. 由 $\mathcal{T}_1$ 是使每个 $f \in \mathcal{K}$ 都连续的最弱拓扑知 $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ ，总之 $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

(b) 设 V 是 $\mathcal{K}-$ 弱拓扑中 x_0 的邻域，不妨设 V 是开的，由 (a)， V 可以表为如下形式

$$V = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcap_{j=1}^{k_\alpha} f_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j}),$$

其中， $\mathcal{A}$ 是任意指标集， k_α 是任意自然数， $f_{\alpha_j}\in\mathcal{K}$ ， $U_{\alpha_j}\in\mathcal{U}$. 注意到 $x_0\in V$ ，于是必存在某个 $\alpha'\in\mathcal{A}$ ，自然数 $k_{\alpha'}$ 以及 $\{f_{\alpha'_j}\}_{j=1}^{k_{\alpha'}}\subset\mathcal{K}$ 和 $\{U_{\alpha'_j}\}_{j=1}^{k_{\alpha'}}\subset\mathcal{U}$ 使

$$x_0\in\mathcal{S}=\bigcap_{j=1}^{k_{\alpha'}} f_{\alpha'_j}^{-1}(U_{\alpha'_j}) .$$

若诸 $U_{\alpha'_j}\in\mathcal{U}(f_{\alpha'_j}(x_0))$ ，则 $\mathcal{S}$ 即为 (b) 中形式之集合. 注意 $f_{\alpha'_j}(x_0)\in U_{\alpha'_j}, j=1,\cdots,k_{\alpha'}$ ，存在 $U_j\in\mathcal{U}(f_{\alpha'_j}(x_0))$ 使 $f_{\alpha'_j}(x_0)\in U_j\subset U_{\alpha'_j}$. 于是 $x_0\in f_{\alpha'_j}^{-1}(U_j)\subset f_{\alpha'_j}^{-1}(U_{\alpha'_j})$ ， $j=1,2,\cdots,k_{\alpha'}$. 这样

$$x_0\in\bigcap_{j=1}^{k_{\alpha'}} f_{\alpha'_j}^{-1}(U_j)\subset V \quad 其中 f_{\alpha'_j}\in\mathcal{K}, U_j\in\mathcal{U}(f_{\alpha'_j}(x_0)) . \qquad \diamond$$

设 $\{\langle T_\alpha,\mathcal{U}_\alpha\rangle;\alpha\in I\}$ 是一族拓扑空间，映射 $f_\alpha:S\to T_\alpha,\alpha\in I,\mathcal{K}=\{f_\alpha;\alpha\in I\}$. 依照上述，同样可以在 S 上定义 $\mathcal{K}-$ 弱拓扑. 由此可以产生乘积空间上的拓扑，即所谓乘积拓扑.

设 $\{\langle S_\alpha,\mathcal{T}_\alpha\rangle;\alpha\in I\}$ 是一族拓扑空间，考虑之笛卡尔积

$$S=\prod_{\alpha\in I}S_\alpha=\{\{x_\alpha;\alpha\in I\};x_\alpha\in S_\alpha,\alpha\in I\}.$$

S 称为 $\{S_\alpha;\alpha\in I\}$(或 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$) 之 乘积空间 . S 中每个元 $x=\{x_\alpha;\alpha\in I\}$ 可以看作 I 上函数，即对每个 $\alpha\in I$, $x(\alpha)=x_\alpha\in S_\alpha$. 这里 x_α 称为元 $x=\{x_\alpha;\alpha\in I\}$ 之第 α 个分量. $\{x_\alpha;\alpha\in I\}$ 有时也记作 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

对每个 $\alpha\in I$ ，可以定义从 S 到 s_α 的映射 $P_\alpha:\{x_\beta;\beta\in I\}\mapsto x_\alpha$ ，通常称为 S 到 S_α 的 射影 .

定义 I.2.2 乘积空间 $S=\prod_{\alpha\in I}S_\alpha$ 上的由射影族 $\{P_\alpha;\alpha\in I\}$ 决定的弱拓扑，即使每个映射 $P_\alpha:S\to S_\alpha$ 都连续的最弱拓扑，称为 $\{\mathcal{T}_\alpha;\alpha\in I\}$ 上的乘积拓扑. 记作 $\prod_{\alpha\in I}\mathcal{T}_\alpha$.

今后在乘积空间上总是赋予乘积拓扑，由命题 2.1 可见，所有形如 $\bigcap_{\alpha\in F}P_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ (其中, F 是 I 之任何有限子集， $U_\alpha\in\mathcal{T}_\alpha$) 的集合是乘积拓扑的拓扑基.

注意，在上述集合中的每个元 $\{x_\alpha;\alpha\in I\}$ 只有有限个坐标 $x_\alpha,\alpha\in F$ 受到限制，要求在集合 $P_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 中，其余的坐标 $x_\alpha,\alpha\notin F$ 是很自由的，可以取遍整个 S_α ，因而每个拓扑基中的元都是很 "大" 的. 作为弱拓扑的一个例子都是在本科泛函分析中学过的序列弱收敛概念.

设 $\mathcal{H}$ 是复可分的 Hilbert 空间，具有内积 $(\cdot,\cdot)$. 设 $x_n\in\mathcal{H},n=1,2,\cdots$. 如果对任何 $y\in\mathcal{H}$ 都有 $(x_n,y)\to(x,y)$ ，当 $n\to\infty$ ，则称 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$序列弱收敛于 x . 由著名的 Riesz 表示定理，这实际上说，对 $\mathcal{H}$ 上每个连续线性泛函 f ，都有 $f(x_n)\to f(x)$ ，当 $n\to\infty$. 容易看出这样的弱收敛实际上是使 $\mathcal{H}$ 上有界线性泛函都连续的最弱拓扑中的收敛.

定义 I.2.3 设 $\mathcal{H}$ 是复可分 Hilbert 空间， $\mathcal{H}^*$ 是 $\mathcal{H}$ 之对偶空间. $\mathcal{H}$ 上之 $\mathcal{H}^*-$ 弱拓扑称为 $\mathcal{H}$ 上 弱拓扑 .

由命题 I.2.1(b) 可见 $\mathcal{H}$ 上弱拓扑在 $0\in\mathcal{H}$ 的邻域基就是所有形如下面的集合

$$N(y_1,\cdots,y_n;\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=\bigcap_{j=1}^{n}\{x\in\mathcal{H};|(x,y_j)|<\varepsilon_j\},$$

其中 $n\in\mathbb{N},y_j\in\mathcal{H},\varepsilon_j>0,j=1,\cdots,n$ ，是任意的. 由于 $\mathcal{H}$ 是线性空间， $\mathcal{H}$ 上弱拓扑在一般元 $x_0\in\mathcal{H}$ 的邻域基是形如下面的集合

$$x_0+N(y_1,\cdots,y_n;\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) \triangleq \{x_0+x;x\in N(y_1,\cdots,y_n;\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n) = \bigcap_{j=1}^{n}\{x\in\mathcal{H};|(x-x_0,y_j)|<\varepsilon_j\}.$$

注意，在 0 点的邻域基表达式 $N(y_1,\cdots,y_n;\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 中若以 y_j/ε_j 代替 $y_j, j=1,\cdots,n$，则它可以表成

$$N(y_1,\cdots,y_n)=\bigcap_{j=1}^{n}\{x\in\mathcal{H};|(x,y_j)|<1\}. \tag{2.1}$$

因此，0 点的邻域基由所有的形如 (2.1) 式的集合组成，以后常以这种形式给定邻域基.

命题 I.2.2 *$\mathcal{H}$ 中序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按弱拓扑收敛于 x 当且仅当对任何 $y\in\mathcal{H},(x_n,y)\to(x,y)$.*

证明 “$\Rightarrow$”. 对任何 $y\in\mathcal{H},\varepsilon>0,U=\{z;|(z-x,y)|<\varepsilon\}$ 是 x 的一个弱拓扑邻域，于是存在自然数 N，当 $n\geq N,x_n\in U$. 即 $|(x_n,y)-(x,y)|=|(x_n-x,y)|<\varepsilon.$

反之，“$\Leftarrow$”. 设 V 是 x 的任何一个弱拓扑的邻域，由弱拓扑邻域基构造，存在 $y_j\in\mathcal{H},\varepsilon_j>0,j=1,\cdots,m$. 使 $x+N(y_1,\cdots,y_n;\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\subset V$. 由假设 $(x_n,y_j)\to(x,y_j),j=1,\cdots,m$. 存在自然数 N，使当 $n\geq N$ 时，$|(x_n,y_j)-(x,y_j)|<\varepsilon_j,j=1,\cdots,m$. 从而当 $n\geq N,x_n\in x+N(y_1,\cdots,y_n;\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\subset V$. 由此，按弱拓扑 $x_n\to x$. ◇

尽管有这样的等价关系，但刻划弱拓扑的收敛不只是序列收敛，而是一种新的收敛，即所谓网的收敛.

I.3 网与收敛

在度量空间中，序列的极限足以刻划聚点，闭集等拓扑对象. 但是在一般的拓扑空间中，仅有序列的极限是不够的，需要引进网及其收敛概念.

定义 I.3.1 *设 $\langle S,\mathcal{T}\rangle$ 是拓扑空间，$A\subset S,x\in S$ 称为 A 之聚点，如果 x 的任何邻域中均有 A 中异于 x 的点. 用 A' 表示 A 之全体聚点的集合.*

包含 A 之最小闭集，即包含 A 之所有闭集的交，称为 A 之闭包，记为 $\overline{A}$.

命题 I.3.1 *$x\in\overline{A}$ 当且仅当 $x\in A$ 或 $x\in A'$.*

证明 $\Rightarrow$ 若不然，存在 x 之开邻域 U 使 $U\cap A=\emptyset$，即 $A\subset U^c$. 而 U^c 是闭集，故 $\overline{A}\subset U^c$. 但 $x\notin U^c$，故 $x\notin\overline{A}$，与假设矛盾.

$\Leftarrow$ 若不然，$x\notin\overline{A}$. 于是存在闭集 F，使 $A\subset F$，但 $x\notin F$. 这样 $x\in F^c$，但 F^c 是开集，且 $A\cap F^c=\emptyset$，于是 x 不是 A 之聚点. 又 $x\notin A$，和假设矛盾. ◇

由命题 I.3.1 可知：

1 $\overline{A}=A\cup A'$；

2 集合 F 是闭集当且仅当 F 包含它的所有聚点.

由数学分析和实变函数论知道,在度量空间中有 x 是集合 A 的聚点当且仅当存在序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A\backslash\{x\}$，使 $x_n\to x$. 但在一般的拓扑空间中，此事不真，主要是必要性不成立.

例 I.3.1 设 $S=[0,1]$，考虑的 S 子集类 $\mathcal{T}=\{G\subset S;S\backslash G$ 是有限或可数 $\}\cup\{\emptyset\}$. 易见 $\mathcal{T}$ 是 S 上一个拓扑. 令 $A=[0,1)$，$x=1$. 容易看到 1 的任何邻域不可能只由 1 组

成，必包含 A 中的点，故 $x=1\in A'$ ，但 A 中任何序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不能收敛到 1 . 事实上，令 $G=S\backslash\{x_n,n=1,2,\cdots\}$. 则 G 是开集，且 $1\in G$ ，但 G 不包含中 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 任何一点，因而 x_n 不收敛到 1 .

例 I.3.2 (von Neumann 的例子) 对每个固定自然数 k ，及所有自然数 $n>k$ ，取 l^2 中元

$$x_n^{(k)}=\{0,\cdots,0,1,0,\cdots,0,k,0,\cdots\},$$

其中 1 是第 k 个坐标，而 k 是第 n 个坐标. 令 $A_k=\{x_n^{(k)};n>k\},A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$. 注意 $\|x_n^{(k)}\|=\sqrt{1+k^2},k=1,2,\cdots$. 这样，A 中任何有界序列一定包含前有限个 A_k 中. 例如，若 $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}\subset A$ 满足 $\|z_j\|\le N$ ， N 是自然数，则 $z_j\in\bigcup\limits_{k=1}^{N}A_k$ ， $j=1,2,\cdots$. 这样存在某个 A_{k_0} ，包含无穷多个 z_j ，而这无穷多个 z_j 之第 k_0 个坐标全为 1 . 这样 $\{z_j\}$ 不可能序列弱收敛于 0 . 我们知道， Hilbert 空间任何弱收敛序列都是有界的，于是这证明 A 中任何序列都不可能弱收敛于 0 . 但是 0 却是 A 之弱聚点，即弱拓扑下聚点.

事实上，由 § I.2 ， 0 点的每个弱拓扑中的邻域都包含如下形式的集合

$$N(y_1,\cdots,y_m)=\bigcap_{j=1}^{m}\{x\in l^2;|(x,y_j)|<1\},$$

其中 $y_j=\{\eta_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}\in l^2$. 于是 $\lim\limits_{i\to\infty}\eta_i^{(j)}=0,j=1,\cdots,m$. 这样，一定有自然数 k ，及 $n>k$ ，使

$$|\eta_k^{(j)}|<\frac{1}{2},|\eta_n^{(j)}|<\frac{1}{2k},j=1,\cdots,m.$$

于是

$$|(x_n^{(k)},y_j)|=|\eta_k^{(j)}+k\eta_n^{(j)}|<|\eta_k^{(j)}|+k|\eta_n^{(j)}|<1,j=1,\cdots,m.$$

从而 $x_n^{(k)}\in N(y_1,\cdots,y_m)$ ，即 0 是 A 之弱聚点，但是 0 不能用 A 中序列来刻划.

定义 I.3.2 设 $\langle I,\ge\rangle$ 是部分有序集. 如果对任何 $\alpha,\beta\in I$ ，都有 $\gamma\in I$ ，使 $\gamma\ge\alpha,\gamma\ge\beta$ ，称 $\langle I,\ge\rangle$ 是 有向集 .

从有向集 I 到拓扑空间 S 的映射 $x:\alpha\mapsto x_\alpha=x(\alpha)$ ，称为 S 中 网(net) . 记为 $\{x_\alpha;\alpha\in I\}$(或 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$) .

自然数集按通常的序是有向集，定义在自然数集上的网就是普通的序列，即序列是特殊的网. 实数集 $\mathbb{R}$ 按通常序也是有向集，根据 $\mathbb{R}$ 的序可以将 $\mathbb{R}^2$ 作成部分有序集.

事实上, 对 $(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2,\ i=1,2$ 定义其序为 $(x_1,y_1)\ge(x_2,y_2)$, 当 $x_1\ge x_2$, 且 $y_1\ge y_2$. 按这个序， $\mathbb{R}^2$ 也是有向集.

按着这个方法，可以将任何两个有向集之笛卡尔积定义为一个有向集，设 $\langle I,\ge\rangle,\langle J,\ge\rangle$ 是两个有向集，在笛卡尔乘积 $K=I\times J$ 中定义 乘积序 如下：对 $(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')\in K$ ，$(\alpha,\beta)\ge(\alpha',\beta')$ ，当 $\alpha\ge\alpha'$ 且 $\beta\ge\beta'$. 易见，按这个乘积序， $\langle K,\ge\rangle$ 成为有向集. 记为 $\langle K,\ge\rangle=\langle I,\ge\rangle\times\langle J,\ge\rangle$.

设 $\langle S,\mathcal{J}\rangle$ 是拓扑空间， $x_0\in S$. 若 $\mathcal{U}(x_0)$ 表示 x_0 的全体邻域之集合. 容易验证按集合包含关系 (对 $U,V\in\mathcal{U}(x_0),V\ge U$ ，若 $V\subset U$) 成为一个有向集. 特别，若 $\mathcal{U}(x_0)$ 表示 x_0 的邻域基，则 $\mathcal{U}(x_0)$ 按集合包含关系也成为有向集. 根据选择公理，对每个 $U\in\mathcal{U}(x_0)$ ，可以取定一个 $x_U\in U$ ，则 $\{x_U;U\in\mathcal{U}(x_0)\}$ 便是 S 中一个网.

定义 I.3.3 拓扑空间 S 中网 $\{x_\alpha;\alpha\in I\}$ 称为收敛到 $x\in S$，如果对任何 $U\in\mathcal{U}(x)$，存在 $\beta\in I$，使 $x_\alpha\in U$，当 $\alpha\geq\beta$．记为 $x_\alpha\to x$，或 $\lim\limits_{\alpha}x_\alpha=x$．

从字面上看，网的收敛和序列的收敛是没有不同，事实上差异很大．一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到一点 x，则对 x 的任何邻域 U，序列中只有有限个点不在该邻域中．但网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 收敛于 x 则不同，对 x 的任何邻域，网中都可能有无穷多个点不在该邻域中．因此，收敛的序列一定是有界的，而收敛的网却未必有界．

可以证明：拓扑空间 S 是 Hausdorff 空间当且仅当 S 中任何收敛的网的极限都是唯一的．

定理 I.3.2 设 $\langle S,\mathcal{J}\rangle$ 是拓扑空间，$A\subset S,\ x\in S$，则 $x\in A'$ 当且仅当存在 $A\cap\{x\}^c$ 中网 $\{x_\alpha;\alpha\in I\}$ 收敛于 x．

证明 必要性，任给 $U\in\mathcal{U}(x)$，由聚点定义，存在 $x_U\in A\cap\{x\}^c$，使 $x_U\in U$．由前述 $\mathcal{U}(x)$ 是有向集，这样我们得到 $A\setminus\{x\}$ 中网 $\{x_U\}_{U\in\mathcal{U}(x)}$，它收敛于 x．事实上，任给 x 之邻域 V，则 $V\in\mathcal{U}(x)$，当 $U\in\mathcal{U}(x)$，且 $U\geq V$ 时，$U\subset V$．从而 $x_U\in U\subset V$，即 $x_U\to x$．

充分性，设 V 是 x 之邻域，由于 $A\cap\{x\}^c$ 中网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 收敛于 x，存在 $\alpha_0\in I$，使 $\alpha\geq\alpha_0,\ x_\alpha\in V$．特别 $x_{\alpha_0}\in V$，且 $x_{\alpha_0}\neq x$，故 x 是 A 之聚点． ◇

推论 I.3.3 $x\in\overline{A}$ 当且仅当存在 A 中网 $\{x_\alpha;\alpha\in I\}$ 收敛到 x．

证明 由命题 I.3.1 和定理 I.3.2 可得必要性．至于充分性，若 $x\in A$，则 $x\in\overline{A}$；若 $x\notin A$，A 中网 $\{x_\alpha;\alpha\in I\}$ 亦即 $A\cap\{x\}^c$ 中网，由定理 I.3.2 可知 $x\in A'$，亦有 $x\in\overline{A}$． ◇

命题 I.3.4 设 S,T 都是拓扑空间，$f:\ S\to T$ 是映射．则 f 是连续的当且仅当对任意 $x_0\in S$ 和收敛于 x_0 的网 $\{x_\alpha;\alpha\in J\}$，$\{f(x_\alpha);\ \alpha\in J\}$ 都是 T 中收敛于 $f(x_0)$ 的网.

证明 必要性，设 $\{x_\alpha;\alpha\in J\}$ 是 S 中网收敛于 x，易见 $\{f(x_\alpha);\ \alpha\in J\}$ 是 T 中网，而且收敛到 $f(x)$．事实上，任给 $f(x)$ 开邻域 V，由 f 连续性，$f^{-1}(V)$ 是 x 开邻域，于是存在 $\beta\in J$，使 $x_\alpha\in f^{-1}(V)$，当 $\alpha\geq\beta$，即 $f(x_\alpha)\in V$，当 $\alpha\geq\beta$．可见 $\{f(x_\alpha);\alpha\in J\}$ 收敛到 $f(x)$．

充分性, 由定理 I.1.1，只须证, 对 T 中任意闭集 F，$f^{-1}(F)$ 是 S 中闭集. 而欲证 $f^{-1}(F)$ 使是闭集, 只须对 $f^{-1}(F)$ 之任何聚点 x_0，都有 $x_0\in f^{-1}(F)$．由定理 I.3.2，存在 $f^{-1}(F)\cap\{x_0\}^c$ 中网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 收敛于 x_0．由假设 $\{f(x_\alpha);\ \alpha\in J\}$ 收敛到 $f(x_0)$，而 $f(x_\alpha)\in F,\ \alpha\in J,\ F$ 是闭集，故 $f(x_0)\in F$，从而 $x_0\in f^{-1}(F)$． ◇

定理 I.3.5 设 $\{S_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 是一族拓扑空间，则乘积空间 $S=\prod\limits_{\alpha\in I}S_\alpha$ 中网 $\{x_\beta;\ \beta\in J\}$ 按乘积拓扑收敛到 x 当且仅当对所有 $\alpha\in I,\ x_\beta(\alpha)\to x(\alpha)$．

证明 必要性，在乘积空间中，对每个 $\alpha\in I$，射影 $P_\alpha:\ S\to S_\alpha$ 是连续的．于是由命题 I.3.4，当 $\{x_\beta;\ \beta\in J\}$ 收敛到 x 时，$\{P_\alpha(x_\beta)\}_{\beta\in J}$ 收敛到 $P_\alpha(x)$，即 $\{x_\beta(\alpha);\ \beta\in J\}$ 收敛于 $x(\alpha)$．

充分性，设 V 是 x 之邻域，由乘积拓扑定义，存在 $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\in I$，使

$$U=\bigcap_{j=1}^{n}P_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j})\subset V\quad(\ U_{\alpha_j}\in\mathcal{U}(x(\alpha_j)),j=1,2,\cdots,n.).$$

注意 $x_\beta(\alpha_j)\to x(\alpha_j),\ j=1,\ \cdots,\ n$．于是必有 $\beta_j\in J,\ j=1,\ \cdots,\ n$，使 $x_\beta(\alpha_j)\in U_{\alpha_j}$，当

$\beta \geq \beta_j,\ j=1,\ \cdots,\ n$．由 J 是有向集，可取 $\beta' \in J$，使 $\beta' \geq \beta_j,\ j=1,\ \cdots,\ n$．则

$$x_\beta(\alpha_j) \in U_{\alpha_j},\ j=1,\ \cdots,\ n,\ \text{当}\beta \geq \beta'$$

即

$$x_\beta \in U = \bigcap_{j=1}^{n} \{P_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j});\ U_{\alpha_j} \in \mathcal{U}(x(\alpha_j))\} \subset V,\ \text{当}\beta \geq \beta'.$$

这说明 $\{x_\beta;\ \beta \in J\}$ 收敛于 x． ◇

回忆度量空间 $\mathbb{R}^n$ 中，一个有界序列未必收敛，但一定有收敛子序列，换言之，这个序列有聚点．现在对一般拓扑空间中的网，也有如下概念．

定义 I.3.4 设 S 是拓扑空间，$\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是 S 中网，$x \in S$．如果对 x 每个邻域 U 和每个 $\beta \in J$，都有 $\alpha \in J$，使 $\alpha \geq \beta$ 且 $x_\alpha \in U$，称 x 是 $\{x_\alpha;\ \alpha \in J\}$ 网的聚点．

显然，若网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 收敛到 x，则 x 必是这个网的聚点．反之，若 x 是网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 之聚点，该网未必收敛到 x．

注意，网 $\{x_\alpha;\ \alpha \in I\}$ 的聚点与作为 S 之集合的 $\{x_\alpha;\ \alpha \in I\}$ 聚点不是一回事．例如，$\{x_\alpha = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ 是拓扑空间 $\mathbb{R}$ 中一个网．作为网，它没有聚点．事实上，对任何 $\alpha_0 \in \mathbb{R}$，取 $(\alpha_0-1,\ \alpha_0+1)$ 为 α_0 之邻域． $\beta = \alpha_0 + 2 \in \mathbb{R}$，则当 $\alpha > \beta,\ x_\alpha = \alpha \notin (\alpha_0-1,\ \alpha_0+1)$，所以 α_0 不是网 $\{x_\alpha = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ 之聚点．但是作为集合，$\{x_\alpha = \alpha;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ 就是实数集 $\mathbb{R}$，有无穷多个聚点．又比如 $\mathbb{R}$ 中网 $\{1,\ 2,\ 1,\ 3,\ \cdots\}$ 有唯一聚点，即 1，但是作为集合，它是全体自然数，没有聚点．

为了刻划网的聚点需要引进所谓“子网”的概念．这是一个比较难掌握的概念．

定义 I.3.5 设 S 是拓扑空间，$\{x_\alpha;\ \alpha \in I\}, \{y_\beta;\ \beta \in J\}$ 都是 S 中网．如果存在映射 $F:\ I \to J$，使：

(a) $x_\alpha = y_{F(\alpha)}$ 对每个 $\alpha \in I$．

(b) 对每个固定 $\beta' \in J$，有 $\alpha' \in I$，使 $F(\alpha) \geq \beta'$ 当 $\alpha \geq \alpha'$,

则称 $\{x_\alpha;\ \alpha \in I\}$ 是 $\{y_\beta;\ \beta \in J\}$ 之<u>子网</u>．

注记 (a) 网和子序列的概念不同，序列的子序列仍定义在同一个有向集上，即自然数集上，但子网和原来网一般来说定义在不同的有向集上．

(b) 若令 $J' = \{F(\alpha);\ \alpha \in I\}$，则 J' 是 J 之子集，按 J 的序列也成为一个有向集：对 $F(\alpha_1),\ F(\alpha_2) \in J' \subset J$，有 $\beta' \in J$ 使 $\beta' \geq F(\alpha_1)$, 且 $\beta' \geq F(\alpha_2)$，由子网定义，存在 $\alpha' \in I$，使 $F(\alpha') \geq \beta'$，从而 $F(\alpha') \in J'$，且 $F(\alpha') \geq F(\alpha_1), F(\alpha') \geq F(\alpha_2)$ 称 J' 为 J 之<u>有向子集</u>．

(c) 有向集 J 之有向子集 K 称为与 J<u>共尾</u>，如果对每个 $\beta' \in J$，都有 $\gamma \in K$，使 $\gamma \geq \beta'$．易见（b）中的 J' 与 J 共尾．

(d) F 是从有向集 J 到有向集 J' 的映射，但它未必保序，也不一定单射．

(e) 序列的子序列也是这个序列的子网，但序列之子网未必是序列，更谈不上是子序列了．设 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是序列，取 $I = [0.\ \infty)$，定义

$$x_\alpha = y_n,\ \text{当 } \alpha \in [n-1,\ n),\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

则 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 是 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 之子网，但不是子序列.

(f) 若 S 是 Hausdorff 空间，则收敛网的任何子网也是收敛，而且极限相同.

设 $\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ 是 S 中网收敛于 y，又设 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 是 $\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ 之子网，若 V 是 y 之任何邻域，由 $y_\beta\to y$，存在 $\beta'\in J$，使 $y_\beta\in V$ 当 $\beta\geq\beta'$. 由子网定义，存在 $\alpha'\in I$，使 $F(\alpha)\geq\beta'$，当 $\alpha\geq\alpha'$. 从而 $x_\alpha=y_{F(\alpha)}\in V$，当 $\alpha\geq\alpha'$. 即 $x_\alpha\to y$. 由 S 是 Hausdorff 空间，$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 收敛的极限是唯一的.

(g) 若 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 是 $\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ 之子网，$\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ 是 $\{z_\gamma;\ \gamma\in K\}$ 之子网，则 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 是 $\{z_\gamma;\ \gamma\in K\}$ 之子网.

定理 I.3.6 *设 $\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ 是拓扑空间 S 中网，$x_0\in S$. 则 x_0 是 $\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ 之聚点当且仅当存在 $\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ 之某个子网 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 收敛到 x_0.*

证明 充分性. 设 U 是 x_0 邻域，由 $x_\alpha\to x_0$，存在 $\alpha'\in I$，使 $x_\alpha\in U$，当 $\alpha\geq\alpha'$. 又 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 是 $\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ 之子网，存在映射 $F:\ I\to J$，对 $\beta'\in J$，存在 $\alpha''\in I$，使 $F(\alpha)\geq\beta'$，当 $\alpha\geq\alpha''$. I 是有向集，存在 $\bar\alpha\in I$，使 $\bar\alpha\geq\alpha'$，且 $\bar\alpha\geq\alpha''$，于是 $F(\bar\alpha)\geq\beta'$ 且 $y_{F(\bar\alpha)}=x_{\bar\alpha}\in U$，可见 x_0 是 $\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ 之聚点.

必要性. 设 $\mathcal{U}(x_0)$ 是 x_0 之邻域基，考虑乘积有向集.

$$K=J\times\mathcal{U}(x_0)=\{(\beta,\ U);\ \beta\in J,\ U\in\mathcal{U}(x_0)\}.$$

I 表示如下定义的 K 之子集

$$I=\{(\beta,\ U);\ \beta\in J,\ U\in\mathcal{U}(x_0),\ 且 y_\beta\in U\}.$$

首先，I 是非空的，取 $U\in\mathcal{U}(x_0),\ \beta'\in J$，由 x_0 是 $\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ 之聚点，存在 $\beta\in J$，使 $\beta\geq\beta'$ 且 $y_\beta\in U$，则 $(\beta,\ U)\in I$.

其次，I 按乘积序是有向子集，若 $(\beta_1,\ U_1),\ (\beta_2,\ U_2)\in I$，则必有 $\beta\in J$，使 $\beta\geq\beta_1$，且 $\beta\geq\beta_2$，又有 $U\in\mathcal{U}(x_0)$，使 $U\subset U_1\cap U_2$，由 x_0 是 $\{y_\beta:\ \beta\in J\}$ 之聚点，存在 $\gamma\in J$，使 $\gamma\geq\beta$ 且 $y_\gamma\in U$，于是 $(\gamma,\ U)\in I$，而且 $(\gamma,\ U)\geq(\beta_j,\ U_j),\ j=1,\ 2$.

定义映射 $x_{(\beta,\ U)}=y_\beta$，当$(\beta,\ U)\in I$. 易见 $\{x_{(\beta,\ U)}=y_\beta:\ (\beta,\ U)\in I\}$ 是 S 中网，且是 $\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ 之子网. 事实上，若令 $F:\ I\to J$ 为 $F((\beta,\ U))=\beta$. 则 $x_{(\beta,\ U)}=y_\beta=y_{F((\beta,\ U))}$. $\forall\beta'\in J$，取 $U_1\in\mathcal{U}(x_0)$，由聚点定义，存在 $\beta_1\in J$，使 $\beta_1\geq\beta'$ 且 $y_{\beta_1}\in U_1$. 则 $\alpha_1=(\beta_1,\ U)\in I$. 当 $\alpha=(\beta,\ U)\geq\alpha_1,\ \beta\geq\beta_1,\ U\geq U_1$，于是 $F(\alpha)=\beta\geq\beta_1\geq\beta'$，所以 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 是 $\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ 之子网.

又根据 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 之选取，有 $x_\alpha\to x_0$. 事实上，对 x_0 任意邻域 V，有 $U'\in\mathcal{U}(x_0)$，使 $U'\subset V$，取定 $\beta_1\in J$，存在 $\beta'\in J$，使 $\beta'\geq\beta_1$ 且 $y_{\beta'}\in U'$，则 $\alpha'=(\beta',\ U')\in I$. 当 $\alpha=(\beta,\ U)\geq\alpha'=(\beta',\ U'),\ \beta\geq\beta',\ U\geq U'$. 于是 $x_\alpha=y_\beta\in U\subset U'\subset V$. ◇

I.4 紧拓扑空间

设 S 是拓扑空间 X 的一个子集. X 中一族开集 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 称为 S 的一个开覆盖，如果 $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}G_\alpha\supset S$. 如果 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$，且 $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{B}}G_\alpha\supset S$，则称 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{B}}$ 为 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 的一个子覆盖.

定义 I.4.1 设 $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ 是拓扑空间， $S \subset X$ 称为紧的，如果 S 的任何开覆盖都有一个有限的子覆盖．如果 X 本身是紧的，则称 X 为紧拓扑空间．如果 $\forall x \in X$ ，都存在 x 的一个紧邻域，则称 X 为一个局部紧的拓扑空间．

大家知道，在 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集都是紧的，而 $\mathbb{R}^n$ 本身不是紧的，但它是局部紧的．一个拓扑空间是不是紧的是非常重要的．在度量空间中紧与自列紧是等价的 (一个集合称为自列紧的，如果其中任何序列都有收敛于该集合中元的子序列)．

例 I.4.1 取普通闭集 $X_n \subseteq [0,1]$, $n = 1, 2, \cdots$ ．当 $m \neq n$ 时，把 X_n, X_m 是视为不同直线中之集合，考虑不交并 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ ．在 X 中令

$$\rho(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{当 } x,\ y \text{ 属于同一个 } X_n \text{；} \\ 1, & \text{当 } x,\ y \text{ 不属于同一 } X_n \text{．} \end{cases}$$

则 $\langle X, \rho \rangle$ 是一个完备的度量空间，从而是一个拓扑空间．又 X 的子集 G 是闭的 $\Longleftrightarrow G \cap X_n$ 是闭的， $\forall n = 1, 2, \cdots$.

在这节总假定所论拓扑空间是 Hausdorff 空间．大家知道， $\mathbb{R}^n$ 中一个集合是紧的当且仅当该集合中任何序列都有子序列收敛于该集合中的某点．这个结果在一般度量空间中也是对的，但是到了一般的拓扑空间变成如下形式定理．

定理 I.4.1 (Bolzano-Weierstrass) 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间， $S \subset X$ ．则 S 是紧的当且仅当 S 中每个网都有子网收敛于 S 中某点（即每个网都有聚点属于 S ）．

证明 充分性．用反证法，设 $\mathcal{U}$ 是 S 之一个开覆盖，没有有限子覆盖． $\mathcal{U}$ 的有限子集的全体记作 $\mathcal{G}$ （即中每个元都是 $\mathcal{U}$ 的有限个集合），则按包含关系 $\mathcal{G}$ 成为一个有向集． $\forall \alpha = \{G_1, \cdots, G_m\} \in \mathcal{G}$ ，它不能覆盖 S ，必有 $x_\alpha \in S$ ，使 $x_\alpha \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} G_i$ ．于是 $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{G}\}$ 是 S 中一个网，由假设，它有子网收敛于 S 中某点，即 $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathcal{G}\}$ 有聚点属于 S ，记为 x ．因 $\mathcal{U}$ 覆盖 S ，必有 $U \in \mathcal{U}$ ，使 $x \in U$ ．注意 $\{U\} \in \mathcal{G}$ ，由聚点定义，存在 $\beta = \{G'_1, \cdots, G'_n\} \in \mathcal{G}$ 使 $\beta \geq \{U\}$ ，且 $x_\beta \in U$ ．又由 $\mathcal{G}$ 中序定义， $\{U\} \subset \{G'_1, \cdots, G'_n\}$ ．这样 $x_\beta \in U \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} G'_j$ ，这和 x_β 选取矛盾．

必要性．也用反证法，设 $\{y_\beta;\ \beta \in J\}$ 是 S 中网，假若它无子网收敛于 S 中某点，即没有聚点属于 S ．于是对任何 $x \in S$ ，存在开邻域 U_x 及 $\alpha_x \in J$ ，对一切 $\alpha \geq \alpha_x$ ，都有 $y_\alpha \notin U_x$ ．但 $\{U_x;\ x \in S\}$ 覆盖 S ，由 S 是紧的，存在有限子覆盖，不妨设为 $U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}$. J 是有向集，取 $\alpha_0 \in J$ ，使 $\alpha_0 \geq \alpha_j$, $j = 1, \cdots, n$ ．从而 $y_{\alpha_0} \notin U_{x_j}$, $j = 1, \cdots, n$ ．这样 $y_{\alpha_0} \notin \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{x_j}$ ，与 $U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}$ 覆盖 S 矛盾． ◇

命题 I.4.2 (a) 紧拓扑空间的闭子集还是紧的．

(b) 紧集在连续映射下的象还是紧的．

证明 (a) 设 S 是紧拓扑空间， F 是 S 之闭子集．根据定理 I.4.1 ，为证 F 是紧的只须证 F 中任何网都有子网收敛于 F 中某点．设 $\{y_\beta;\ \beta \in J\}$ 是 F 中网，当然也是 S 中网，因 S 是紧的，由定理 I.4.1 ，存在收敛子网 $\{x_\alpha;\ \alpha \in I\}$ ．设 $x_\alpha \to x$ ，因 F 是闭集，故 $x \in F$ ．于是 $\{x_\alpha;\ \alpha \in I\}$ 在 F 中收敛．

(b) 设 F 是紧集， $f: S \to T$ 是连续映射，为证 $f(F)$ 是紧的，只须证 $f(F)$ 中任何网都有子网收敛于 $f(F)$ 中某点．设 $\{y_\beta;\ \beta \in J\}$ 是 $f(F)$ 中网，由选择公理，可取 $z_\beta \in$

$f^{-1}(y_\beta)\cap F,\ \forall\beta\in J$ ，则 $\{z_\beta;\ \beta\in J\}$ 是 F 中网．因 F 是紧的，有子网 $\{w_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 收敛于 $w\in F$ ，令 $x_\alpha=f(w_\alpha),\ \alpha\in I$ ．则 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 是 $\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ 之子网． f 是连续的，由命题 I.3.4 ， $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 收敛于 $f(w)\in f(F)$ ． ◇

推论 I.4.3 设 S 是紧拓扑空间， f 是 S 上连续实值函数，则 f 在 S 上能达到最大值和最小值.

证明 由命题 I.4.2(b) ， $f(S)$ 是 $\mathbb{R}$ 中紧集，当然就有最大值和最小值. ◇

命题 I.4.4 设 S 是 Hausdorff 空间， A 是 S 之紧子集，则 A 是闭的.

证明 设 $x\in A'$ ，由推论 I.3.3 ，存在 A 中网 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 收敛于 x ．因 A 是紧集．故 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 有收敛于 A 中某个元 y 之子网 $\{y_\beta;\ \beta\in J\}$ ．因 S 是 Hausdorff 空间， $y_\beta\to x$ ．从而 $x=y\in A$ ，故 A 是闭集. ◇

在非 Hausdorff 空间中，紧集未必是闭集.

例 I.4.2 设 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ ．定义 S 中开集为 $\{k,\ k+1,\ k+2\ \cdots\},\ k=1,\ 2,\ \cdots$ 及空集, 所有这样开集生成的 S 上拓扑空间不是 Hausdorff 空间. 包含 1 的开集一定包含 2 . 故 1 与 2 不能被不相交开集分开. 子集 $A=\{1,\ 3\}$ 是紧集, 但不是闭集, 因为其余集 $A^c=\{2,\ 4,\ 5,\ \cdots\}$ 不是开集.

命题 I.4.5 设 $S,\ T$ 都是紧 Hausdorff 空间， $f:\ S\to T$ 是连续的双射，则 f 是同胚.

证明 只须证明 f 是开的，因为 f 是双射，只须证对 S 之任何闭子集 $F,\ f(F)$ 是 T 之闭子集．因 S 是紧的， F 也是紧的，由命题 I.4.2 之 (b) ， $f(F)$ 是 T 之紧集，又 T 是 Hausdorff 空间，故 $f(F)$ 也是闭的. ◇

定理 I.4.6 设 X 是 Hausdorff 空间， $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 是 X 中一族紧子集．若 $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}K_\alpha=\emptyset$ ，则存在 $\mathcal{A}$ 之有限子集 $\mathcal{A}_0$ 使 $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_0}K_\alpha=\emptyset$ ．

证明 设 $V_\alpha=K_\alpha^c$ ， $\forall\alpha\in\mathcal{A}$ ，则 V_α 是开集，由 $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}K_\alpha=\emptyset$ ， $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}V_\alpha=X$ ．取定 $\alpha_0\in\mathcal{A}$ ，则 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 是 K_{α_0} 的一个开覆盖．又由于 K_{α_0} 是紧的，故存在有限子覆盖 $\{V_{\alpha_1},\ V_{\alpha_2},\ \cdots,\ V_{\alpha_m}\}$ ．即

$$K_{\alpha_0}\subset\bigcup_{j=1}^m V_{\alpha_j}\ .$$

从而 $V_{\alpha_0}\cup V_{\alpha_1}\cup\cdots\cup V_{\alpha_m}=X$ ．故

$$\bigcap_{j=0}^m K_{\alpha_j}=\emptyset\ .$$

取 $\mathcal{A}_0=\{\alpha_j\}_{j=1}^m$ 即可. ◇

定理 I.4.7 设 X 是 Hausdorff 空间， $K\subset X$ ， K 是紧的， $p\notin K$ ．则存在开集 $U,\ V$ 使

$$p\in U\ ,\quad K\subset V\ ,\ \text{且}\ U\cap V=\emptyset\ .$$

证明 设 $q\in K$ ，则 $q\neq p$ ．因为 X 是 Hausdorff 空间，所以存在开集 U_q 和 V_q 使

$$p\in U_q\ ,\quad q\in V_q\ ,\ \text{且}\ U_q\cap V_q=\emptyset\ .$$

这样, $\{V_q:q\in K\}$ 是 K 的一个开覆盖. 由于 K 是紧的, 故有有限子覆盖 $\{V_{q_1},\ V_{q_2},\ \cdots,\ V_{q_m}\}$ ．令

$$U=\bigcap_{j=1}^m U_{q_j}\ ,\quad V=\bigcup_{j=1}^m V_{q_j}\ .$$

则 U 和 V 即为所求. ◇

定理 I.4.8 设 X 是 Hausdorff 空间， $F,\ K\subset X$ 都是紧的，且 $F\cap K=\emptyset$ ，则存在开集 $U,\ V$ 使

$$F\subset U\ ,\quad K\subset V\ ，且\ U\cap V=\emptyset\ .$$

证明 $\forall x\in F$ ，根据定理 I.4.7 ，可取开集 U_x 和 V_x 使

$$x\in U_x\ ,\quad K\subset V_x\ ，且\ U_x\cap V_x=\emptyset\ .$$

这样，得到 F 的开覆盖 $\{U_x:\ x\in F\}$ ．由于 F 是紧的，故存在有限子覆盖 $\{U_{x_j}\}_{j=1}^m$ ．令

$$U=\bigcup_{k=1}^m U_{x_k}\ ,\quad V=\bigcap_{j=1}^m V_{x_j}\ .$$

那么 $U,\ V$ 都是开集， $F\subset U$ ， $K\subset V$ ，且

$$U\cap V=\bigcup_{k=1}^m (U_{x_k}\cap(\bigcap_{j=1}^m V_{x_j}))\subset\bigcup_{k=1}^m (U_{x_k}\cap V_{x_k})=\emptyset\ .$$

◇

定理 I.4.9 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间， K 是紧集， U 是开集， $K\subset U$ ．则存在开集 V 具有紧闭包 $\overline{V}$ 使

$$K\subset V\subset\overline{V}\subset U\ .$$

证明 因为 X 是局部紧的， $\forall x\in K$ ，存在具有紧闭包的开邻域 V_x ．这样得到 K 的开覆盖 $\{V_x:\ x\in K\}$ ．由于 K 是紧的，存在有限子覆盖 $\{V_{x_j}\}_{j=1}^m$ ．令 $F=(\bigcup_{j=1}^m \overline{V_{x_j}})\setminus U$ ．注意到， $\bigcup_{j=1}^m \overline{V_{x_j}}$ 是紧子集，而 F 是它的闭子集．故 F 是一个紧子集．易见， $F\cap K=\emptyset$ ．根据定理 I.4.8 ，存在开集 $W,\ \Omega$ 使

$$K\subset W\ ,\quad F\subset\Omega\ ，且\ W\cap\Omega=\emptyset\ .$$

令 $V=W\cap(\bigcup_{j=1}^m V_{x_j})\setminus\overline{\Omega}$ ．那么 V 是开集， $K\subset V$ ． $\forall x\in\overline{V}$ ，由于 $\overline{V}\subset\overline{W}\subset\Omega^{\rm c}$ ， $x\notin\Omega$ ．于是

$$x\in(\bigcup_{j=1}^m \overline{V_{x_j}})\cap F^{\rm c}=(\bigcup_{j=1}^m \overline{V_{x_j}})\cap(U\cup(\bigcup_{j=1}^m \overline{V_{x_j}})^{\rm c})\subset U\ .$$

故

$$\overline{V}\subset U\ .$$

此外， $\overline{V}\subset\bigcup_{j=1}^m \overline{V_{x_j}}$ ，故 $\overline{V}$ 是紧的． ◇

命题 I.4.10 设 $\{S_i\}_{i=1}^n$ 是 n 个紧拓扑空间，则 $S=\prod_{1\le i\le n} S_i$ 关于乘积拓扑是紧的．

证明 由定理 I.4.1 ，只须证 S 中任何网都有收敛子网．设 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 是 S 中网，其中 $x_\alpha=(x_\alpha(1),\ x_\alpha(2),\ \cdots,\ x_\alpha(n)), x_\alpha(i)\in S_i,\ i=1,\ \cdots,\ n$ ．因 S_1 是紧的， $\{x_\alpha(1);\ \alpha\in I\}$ 有收敛子网 $\{x_{F_1(\beta_1)}(1);\ \beta_1\in J_1\}$ ，设 $x_{F_1(\beta_1)}(1)\to x(1)$ ．再看 S_2 ，注意 $\{x_{F_1(\beta_1)}(2);\ \beta_1\in J_1\}$ 是 $\{x_\alpha(2);\ \alpha\in I\}$ 之子网．由 S_2 紧， $\{x_{F_1(\beta_1)}(2);\ \beta_1\in J_1\}$ 有收敛子网 $\{x_{F_2(\beta_2)}(2);\ \beta_2\in J_2\}$ ，设 $x_{F_2\beta_2}(2)\to x(2)$ ．注意 $\{x_{F_2(\beta_2)}(1);\ \beta_2\in J_2\}$ 也是 $\{x_{F_1(\beta_1)}(1);\ \beta_1\in J_1\}$ 之子网，所以收敛，且 $x_{F_2(\beta_2)}(1)\to x(1)$ ．如此类推，根据数学归纳法， S_n 中存在 $\{x_\alpha(n);\ \alpha\in I\}$ 之收敛子网 $\{x_{F_n(\beta_n)}(n);\ \beta_n\in J_n\}$ ，设 $x_{F_n(\beta_n)}(n)\to x(n)$ ，而且对每个 $i,\ 1\le i\le n-1$ ， $\{x_{F_n(\beta_n)}(i);\ \beta_n\in J_n\}$ 亦是 $\{x_\alpha(i);\ \alpha\in I\}$ 之收敛子网，且 $x_{F_n(\beta_n)}(i)\to x(i)$ ．令 $x_{F_n(\beta_n)}=(x_{F_n(\beta_n)}(1),\ \cdots,\ x_{F_n(\beta_n)}(n)),\ \beta_n\in J_n$ ，则由定理 I.3.5 ， $\{x_{F_n(\beta_n)};\ \beta_n\in J_n\}$ 是 $\{x_\alpha;\ \alpha\in I\}$ 之收敛子网，故 S 是紧的． ◇

这个结果可以推广到任意多个紧拓扑空间的乘积空间，这就是著名的 Tnxohob 定理．

定理 I.4.11 (Tnxohob) 设 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一族紧拓扑空间，则 $S=\prod_{\alpha\in I} S_\alpha$ 关于乘积拓扑是

紧的.

证明可见 Kelley 的 ≪ 一般拓扑学 ≫（中译本）一书.

I.5 Banach 空间上弱拓扑

在 § I.2，作为例子我们曾看到 Hilbert 空间上弱拓扑，现在我们看一般 Banach 空间上弱拓扑.

设 X 是复 Banach 空间， X^* 表示其对偶空间，即 X 上全体有界线性泛函集合.

定义 I.5.1 Banach 空间 X 上 X^*- *弱拓扑，即使每个* $l \in X^*$ *皆连续的最弱拓扑，称为* X *上* <u>*弱拓扑*</u>，*记为* $\sigma(X, X^*)$．*显然弱拓扑弱于范数拓扑.*

根据弱拓扑邻域基的构造 (见命题 I.2.1 之 (b))，所有形如

$$N(l_1, \cdots, l_n, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X;\ |l_i(x)| < \varepsilon_i\}$$

的集合构成 X 上弱拓扑在零点 0 处的邻域基，其中 $n \in \mathbb{N},\ l_i \in X^*,\ \epsilon_i > 0,\ i = 1, \cdots, n$ 是任意的. 注意 l_i 可用 l_i/ε_i 代替， $i = 1, \cdots, n$, 上述邻域可表成

$$N(l_1, \cdots, l_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X;\ |l_i(x)| < 1\}$$

对任何 $x_0 \in X$，所有形如

$$x_0 + N(l_1, \cdots, l_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X;\ |l_i(x - x_0)| < 1\}$$

或

$$x_0 + N(l_1, \cdots, l_n, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X;\ |l_i(x - x_0)| < \varepsilon_i\}$$

的集合形成 x_0 处弱拓扑邻域基.

在有限维 Banach 空间，弱拓扑与原来的范数拓扑相同，在无穷维空间就不一样了. 本科泛函分析中学过的序列弱收敛，实际上就是序列按弱拓扑的收敛，证明可按 § 2 Hilbert 空间情形完成.

命题 I.5.1 *在* Banach *空间* X *中，弱拓扑是* Hausdorff *拓扑.*

证明 设 $x_0,\ y_0 \in X,\ x_0 \neq y_0$，由 Hahn-Banach 扩张定理，存在 $l \in X^*$，使

$$l(x_0 - y_0) = 1 \text{且} \|l\| = 1.$$

令 $N = \{x \in X;\ |l(x)| < 1/2\}$，则 $x_0 + N,\ y_0 + N$ 分别是 $x_0,\ y_0$ 之弱拓扑邻域，但是 $(x_0 + N) \cap (y_0 + N) = \emptyset$． ◇

命题 I.5.2 *设* $\{x_\alpha;\ \alpha \in I\}$ *是空间* X *中的网，* $x \in X$，*则* $\{x_\alpha;\ \alpha \in I\}$ *按弱拓扑收敛于* x *当且仅当对任何* $l \in X^*,\ l(x_\alpha) \to l(x)$．

证明 必要性. 由弱拓扑定义，每个 $l \in X^*$ 按弱拓扑都连续，于是若 $x_\alpha \to x$ 按弱拓扑，则 $l(x_\alpha) \to l(x)$．

充分性. 由弱拓扑邻域基的构造, 对 x 之任何邻域 V , 存在 $N(l_1,\ \cdots,\ l_n)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\{y\in X;\ |l_i(y)|<1\}$ 使 $x+N(l_1,\ \cdots,\ l_n)\subset V$. 由假设, 对每个 $l_j,\ j=1,\ \cdots,\ n,\ l_j(x_\alpha)\to l_(x)$. 于是存在 $\alpha_j,\ j=1,\ \cdots,\ n$ 使

$$|l_j(x_\alpha)-l_(x)|<1,\ 当\alpha\geq\alpha_j$$

I 是有向集, 必有 $\alpha'\in I$, 满足 $\alpha'\geq\alpha_j,\ j=1,\ \cdots,\ n$. 则当 $\alpha\geq\alpha'$, 对所有 $j,\ j=1,\ \cdots,\ n$, 都有 $|l_j(x_\alpha)-l_j(x)|<1$. 即 $x_\alpha\in x+N(l_1,\ \cdots,\ l_n)\subset V$ 因而按弱拓扑, $x_\alpha\to x$. ◇

设 X 是 Banach 空间, X^* 是 X 之对偶空间, 对每个 $x\in X$, 由 $\tau(x)(f)=f(x),\ \forall f\in X^*$ 定义的 $\tau(x)$ 是 X^* 上有界线性泛函, 因而 $\tau(X)$ 是 X^{**} 的子集.

定义 I.5.2 *X^* 上使每个 $\tau(x),\ x\in X$, 连续的最弱拓扑, 即 $\tau(X)-$ 弱拓扑称为 X^* 上弱 * 拓扑. 记作 $\sigma(X^*,\ X)$.*

由命题 I.2.1 (b) , $0\in X^*$ 的弱 * 拓扑邻域基由所有下述形式集合构成

$$N(x_1,\ \cdots,\ x_m,\varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_m)=\bigcap_{j=1}^{m}\{l\in X^*;\ |l(x_j)|<\varepsilon_j\}\ ,$$

其中 $m\in\mathbb{N},\ x_j\in X,\varepsilon_j>0,\ j=1,\ \cdots,\ m$ 是任意的. 或等价地由所有下述形式集合构成

$$N(x_1,\ \cdots,\ x_m)=\bigcap_{j=1}^{m}\{l\in X^*;\ |l(x_j)|<1\}\ .$$

而对任何 $l_0\in X^*$ 的弱拓扑邻域基, 可以由所有形如

$$l_0+N(x_1,\ \cdots,\ x_m,\ \varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_m)=\bigcap_{i=1}^{m}\{l\in X^*;\ |l(x_j)-l_0(x_j))|<\varepsilon_i\}$$

或

$$l_0+N(x_1,\ \cdots,\ x_m)=\bigcap_{i=1}^{m}\{l\in X^*;\ |l(x_j)-l_0(x_j)|<1\}$$

的集合构成.

这样, X^* 上有三种拓扑, 范数拓扑, 弱拓扑及弱 * 拓扑. 已知弱拓扑弱于范数拓扑, 又 $\tau(X)\subset X^{**}$, 所以弱 * 拓扑弱于弱拓扑, 当 X 是自反空间时, $\tau(X)=X^{**}$, 弱 * 拓扑与弱拓扑重合.

大家知道, 对无穷维 Banach 空间, 闭单位球按范数拓扑不是紧的, 下面重要定理表明, 共轭 Banach 空间闭单位球在弱 * 拓扑下可以恢复紧性.

定理 I.5.3 (Banach-Alaoglu) *设 X 是 Banach 空间, 则 X^* 的闭单位球 $(X^*)_1=\{l\in X^*;\ \|l\|\ \leq 1\}$ 是弱 * 紧的, 即是弱 * 拓扑下紧集.*

证明 对每个 $x\in X$, 令 $B_x=\{\lambda\in\mathbb{C};\ |\lambda|\leq\|x\|\}$. 显然 B_x 是 $\mathbb{C}$ 中的紧集, 由 Tnxohob 定理, $B=\prod\limits_{x\in X}B_x$ 按乘积拓扑是紧的.

设 $b\in B$, 则 $b_x=b(x)\in B_x,\forall x\in X$, 即 $|b(x)|\leq\|x\|$. 因而每个 $b\in B$ 是满足如下条件的 X 上函数

$$|b(x)|\leq\|x\|,\ x\in X\ .$$

设 $l\in(X^*)_1$, 则 $\|l\|\leq 1$, 从而 $|l(x)|\leq\|l\|\ \|x\|\leq\|x\|,\ \forall x\in X$. 因而 $l\in B$. 所以 $(X^*)_1$ 是 B 之一个子集: $(X^*)_1\subset B$. 注意 B 上的乘积拓扑 $\mathcal{T}$ 是使每个 $x\in X$, 射影 $P_x:\ b\mapsto b_x$ 都连续的最弱拓扑, 而 $(X^*)_1$ 的弱 * 拓扑是使每个 $x\in X$, 映射 $\tau(x):\ l\mapsto l(x)$ 都连续的最弱拓扑, 所以 B 的乘积拓扑 $\mathcal{T}$ 在 $(X^*)_1$ 上诱导的相对拓扑恰是 $(X^*)_1$ 上的弱 * 拓扑. 这样为

证 $(X^*)_1$ 是弱 * 紧的，只须证 $(X^*)_1$ 是 B 之闭子集.

设 $\{l_\alpha;\ \alpha\in J\}$ 是 $(X^*)_1$ 中网按乘积拓扑 $\mathcal{T}$ 收敛于 l ，即 $l_\alpha(x)\to l(x),\forall x\in X$ ．由 l_α 都是 X 上线性泛函，可见 l 亦是 X 上线性泛函，又

$$|l_\alpha(x)|\le\|l_\alpha\|\ \|x\|\le\|x\|,\ \forall x\in X$$

可见 $|l(x)|\le\|x\|,\ \forall x\in X$ ．故 $\|l\|\le1$ ，即 $l\in(X^*)_1$ ．所以 $(X^*)_1$ 是闭集. ◇

推论 I.5.4 *设 X 是自反 Banach 空间，则 X 的闭单位球 $X_1=\{x\in X;\ \|x\|\le1\}$ 是弱紧集，即弱拓扑下紧集.*

证明 因 X 是自反的，故 $\tau(X)=X^{**}$ ．由于 $\tau:\ X\to X^{**}$ 是等距同构， $\tau(X_1)=(X^{**})_1$, X^{**} 之闭单位球，且 $\sigma(X,\ X^*)=\sigma(X^{**},\ X^*)$ ．由定理 I.5.3， $(X^{**})_1$ 按 $\sigma(X^{**},\ X^*)$ 是紧的，即 X_1 按 $\sigma(X^{**},\ X^*)$ 是紧的. ◇

在一般的拓扑空间中，紧与自列紧是互不包含的概念，但是对 Banach 空间弱拓扑，却又下面定理.

定理 I.5.5 *设 A 是 Banach 空间 X 的子集，则下述条件等价*

(a) A 是弱列紧，即 A 中任何序列都有弱收敛的子序列.

(b) A 是弱预紧，即 A 之弱闭包是紧的.

(c) A 之每个无穷子集都有弱聚点.

证明参见 N. Dunford & J. Schwarz, ‘Linear Operators, Vol. I’, P430.

注意，上述定理说的是“弱”而非“弱 * ”.

例 I.5.1 *有弱 * 紧而非弱 * 列紧的集合.*

考虑 $(l^\infty)^*$ 的闭单位球 $(l^\infty)_1^*$ ，由 Banach-Alaoglu 定理，它是弱 * 紧的，但它不是弱 * 列紧的.

对每个自然数 n ，取 $f_n\in(l^\infty)_1^*$ 如下：

$$f_n(\{\xi_m\}_{m=1}^\infty)=\xi_n,\ \forall\{\xi_m\}_{m=1}^\infty\in l^\infty$$

则 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 之任何子序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 不能在 l^∞ 上处处收敛，即不弱 * 收敛．事实上，取 $x_0=\{\xi_m\}_{m=1}^\infty$ 为

$$\xi_m=\begin{cases}1, & \text{当 } m\in\{n_{2k-1}:\ k=1,\ 2,\ 3,\cdots\}\\ 0, & \text{当 } m\notin\{n_{2k-1}:\ k=1,\ 2,\ 3,\cdots\}.\end{cases}$$

则 $\{f_{n_k}(x_0)\}_{k=1}^\infty$ 交替取 $1,0$ ，不收敛.

命题 I.5.6 *设 X 是无穷维 Banach 空间，则其单位球面 $S(=\{x\in X;\ \|x\|=1\})$ 的弱闭包恰是闭单位球 $B=\{x\in X;\ \|x\|\le1\}$.*

证明 设 $\overline{S}^w$ 是 S 的弱闭包．须证 $(\overline{S}^w)^c\cap B=\emptyset$ ，从而 $B\subset\overline{S}^w$ ．若不然，存在 $x_0\in(\overline{S}^w)^c\cap B$ ．因 $S\subset\overline{S}^w$ ，故 $\|x_0\|<1$ ，又 $(\overline{S}^w)^c$ 是 x_0 之弱开邻域，由弱拓扑邻域基构造，存在 $N(l_1,\ \cdots,\ l_n)=\bigcap_{j=1}^n\{x\in X;\ |l_j(x)|<1\}$ 使 $x_0+N(l_1,\ \cdots,\ l_n)\subset(\overline{S}^w)^c$ ，其中 $l_1,l_2,\cdots,l_n\in X^*$ ．设 $F=\mathrm{Span}\{l_1,\ \cdots,\ l_n\}$ ，则 $\dim F\le n$ ．令

$$K={}^\perp F\doteq\{x\in X;\ l(x)=0,\ \forall l\in F\},$$

则 K 是 X 之子空间. 由 X 是无穷维的, $K \neq \{0\}$. 取 $x_1 \in K$, 使 $\|x_1\| \geq 2$. 注意 $K \subset N(l_1, \cdots, l_n)$, 从而对任何 $t \in [0, 1]$, $x_0 + tx_1 \in x_0 + K \subset x_0 + N(l_1, \cdots, l_n) \subset (\overline{S}^w)^c$. 记 $f(t) = \|x_0 + tx_1\|$, 则 f 是 $[0,1]$ 上连续函数. $f(0) = \|x_0\| < 1$, $f(1) = \|x_0 + x_1\| \geq \|x_1\| - \|x_0\| > 1$, 于是必存在 $t_0 \in [0, 1]$, 使 $f(t_0) = \|x_0 + t_0 x_1\| = 1$. 即 $x_0 + t_0 x_1 \in S \cap (\overline{S}^w)^c = \emptyset$. 这是不可能的.

另一方面, $\forall x_0 \in X$, $\|x_0\| > 1$, 由 Hahn-Banach 扩张定理, 存在 $l \in X^*$ 使 $\|l\| = 1$, 且 $l(x_0) = \|x_0\| > 1$. 但对 S 中任何网 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, $\|x_\alpha\| = 1$. 于是 $|l(x_\alpha)| \leq \|l\| \, \|x_\alpha\| = 1$. 故 $l(x_\alpha)$ 不收敛到 $l(x_0)$, 可见 x_0 不是 S 之弱聚点, 即 $x_0 \notin \overline{S}^w$. 这表明 $\overline{S}^w \subset B$. ◇

I.6 算子拓扑

设 X, Y 是 Banach 空间, $\mathcal{L}(X, Y)$ 表示从 X 到 Y 的全体有界线性算子集合. 我们知道, 按算子范数 $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\mathcal{L}(X, Y)$ 是一个 Banach 空间, 它也如一般 Banach 空间一样有 $[\mathcal{L}(X, Y)]^*$ 弱拓扑. 此外还有两种特殊的比范数拓扑弱的拓扑, 即强算子拓扑和弱算子拓扑. 下面将介绍这两种拓扑.

对任何 $x \in X$, 令 $\tau_x(T) = Tx$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, 则 τ_x 是 $\mathcal{L}(X, Y)$ 到 Y 的一个映射. 记 $\mathcal{G} = \{\tau_x;\ x \in X\}$, 则 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{L}(X, Y)$ 到 Y 的一族映射.

定义 I.6.1 *$\mathcal{L}(X, Y)$ 上由 $\mathcal{G}$ 确定的弱拓扑, 称为 强算子拓扑* .

容易看到强算子拓扑在 $0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ 的邻域基由所有如下形式集合构成.

$$N(x_1, \cdots, x_n) = \bigcap_{j=1}^{n} \{T \in \mathcal{L}(X, Y);\ \|Tx_j\| < 1\}.$$

这里 $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in X$, $j = 1, \cdots, n$ 是任意的. 对任何 $T_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$, 强算子拓扑在 T_0 处邻域基由所有如下形式集合构成.

$$T_0 + N(x_1, \cdots, x_n) = \bigcap_{j=1}^{n} \{T \in \mathcal{L}(X, Y);\ \|Tx_j - T_0 x_j\| < 1\}.$$

由此易证 $\mathcal{L}(X, Y)$ 中网 $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 按强算子拓扑收敛于 T 当且仅当对任意 $x \in X$, $\|T_\alpha x - Tx\| \to 0$. 这时称 $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 强收敛于 T , 记为 $T_\alpha \to T$ (SOT) , 或 $\lim\limits_{\alpha} T_\alpha = T$ (SOT) , 或 SOT-$\lim\limits_{\alpha} T_\alpha = T$.

于任意 $x \in X$, $y^* \in Y^*$, 令 $\tau_{xy^*} = y^*(Tx)$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, 则 τ_{xy^*} 是从 $\mathcal{L}(X, Y)$ 到 $\mathbb{C}$ 的一个函数. 记 $\mathcal{G} = \{\tau_{xy^*};\ x \in X,\ y^* \in Y^*\}$. 则 $\mathcal{G}$ 是从 $\mathcal{L}(X, Y)$ 到 $\mathbb{C}$ 的一族函数.

定义 I.6.2 *$\mathcal{L}(X, Y)$ 上由 $\mathcal{G}$ 确定的弱拓扑称为 弱算子拓扑* .

容易看出, $0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ 在弱算子拓扑下的邻域基由所有如下形式集合构成.

$$N(x_1, \cdots, x_n, y_1^*, \cdots, y_n^*) = \bigcap_{j=1}^{n} \{T \in \mathcal{L}(X, Y);\ |y_j^*(Tx_j)| < 1\} .$$

其中 $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in X$, $y_j^* \in Y^*$, $j = 1, \cdots, n$, 是任意的. 而于任意 $T_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ 的弱算子拓

扑的邻域基由所有如下形式集合构成.

$$T_0+N(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y_1^*,\ \cdots,\ y_n^*)=\bigcap_{j=1}^{n}\{T\in\mathcal{L}(X,\ Y);\ |y_j^*(Tx_j)-y_j^*(T_0x_i)|<1\}\ .$$

据此不难证明, $\mathcal{L}(X,\ Y)$ 中网 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 按弱算子拓扑收敛于 $T\in\mathcal{L}(X,\ Y)$ 当且仅当对任意 $x\in X,\ y^*\in Y^*$ ，都有 $\lim\limits_{\alpha}y^*(T_\alpha x)=y^*(Tx)$. 这时简称 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 弱收敛于 T ，记为 $T_\alpha\to T$ (WOT) ，或 $\lim\limits_{\alpha}T_\alpha=T$ (WOT) ，或 WOT-$\lim\limits_{\alpha}T_\alpha=T$.

显然, 在 $\mathcal{L}(X,\ Y)$ 上, 弱算子拓扑 $\le$ 强算子拓扑 $\le$ 一致拓扑, 这里, 一致拓扑指的是范数拓扑. 当 $X,\ Y$ 不是有限维空间时, 这三个拓扑是不同的. 另外, 值得注意 $\mathcal{L}(X,\ Y)$ 上弱算子拓扑与 $\mathcal{L}(X,\ Y)$ 作为 Banach 空间得弱拓扑不是一回事. 不难验证: 对任意 $x\in X,\ y^*\in Y^*,\ \tau_{xy^*}$ 是 $\mathcal{L}(X,\ Y)$ 上有界线性泛函. 因而 $\mathcal{G}$ 可以看作 $[\mathcal{L}(X,\ Y)]^*$ 得一个子集, 于是弱算子拓扑比 $\mathcal{L}(X,\ Y)$ 作为 Banach 空间的弱拓扑更弱.

对 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上弱算子拓扑在 $0\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的邻域基由所有如下形式集合

$$N(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)=\bigcap_{j=1}^{n}\{T\in\mathcal{L}(\mathcal{H});\ |(Tx_j,\ y_j)|<1\}\ .$$

构成, 其中 $n\in\mathbb{N},x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,\ y_n\in\mathcal{H}$ ，是任意的. 而 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 中网 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 及 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 有

$$T_\alpha\to T(\text{WOT})\Leftrightarrow(T_\alpha x,\ y)\to(Tx,\ y),\forall x,\ y\in\mathcal{H}\ .$$

我们知道, 在 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的一致拓扑中总有下述成立

$$\text{若 } T_\alpha\to T\ ,\ \text{则 } T_\alpha^*\to T^*\ . \tag{6.1}$$

$$\text{若 } T_\alpha\to T,\ S_\alpha\to S\ ,\ \text{则 } T_\alpha S_\alpha\to TS\ . \tag{6.2}$$

这里 $T_\alpha^*,\ T^*$ 表示 T_α,T 之伴随算子.

但是在强算子拓扑与弱算子拓扑中, 这些论断未必成立.

例 I.6.1 考察 l^2 上移位算子

$$S\{\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \cdots\}=\{0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \cdots\},\ \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}\in l^2$$

容易验证, $\forall x\in l^2,\ \|Sx\|=\|x\|$ ，且 S 的伴随算子为

$$S^*\{\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \cdots\}=\{\xi_2,\xi_3,\xi_4,\ \cdots\},\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}\in l^2$$

令 $T_n=(S^*)^n,n=1,2,\cdots$. 显然, 对任何 $x=\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}\in l^2,\ \|x\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2<+\infty$ ，而

$$\|T_nx\|^2=\|(S^*)^n\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}\|^2=\|\{\xi_n+1,\ \xi_n+2,\ \cdots\}\|^2=\sum_{j=n+1}^{\infty}|\xi_j|^2\to 0,\ \text{当}n\to\infty.$$

即 $T_n\to 0(\text{SOT})$. 但是 $T_n^*=S^n,\ n=1,\ 2,\ \cdots$. 从而 $\|T_n^*x\|=\|S^nx\|=\|x\|,\ \forall x\in l^2$. 即 T_n^* 按强算子拓扑不收敛于 0 .

这说明论断 (6.1) 在强算子拓扑中不成立.

引理 I.6.1 设 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{L}(X,\ Y)$ ，且 $T_n\to T(\text{WOT})$ ，则存在正数 M 使 $\|T_n\|\le M,\ n=1,\ 2,\ \cdots$.

证明利用共鸣定理可得.

命题 I.6.2 设 X, Y, Z 是 Banach 空间，$\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(Y, Z)$，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, $T_n \to T, S_n \to S$ (SOT)，则 $T_nS_n \to TS$ (SOT).

证明 首先，由引理 I.6.1 存在正常数 M, 使 $\|T_n\| \le M,\ n = 1, 2, \cdots$，$\forall x \in X$，及 $\varepsilon > 0$，由假设存在 N，使当 $n > N$ 时，$\|(T_n - T)Sx\| < \varepsilon/2,\ \|(S_n - S)x\| < \varepsilon/2M$. 于是

$$\begin{aligned}\|(T_nS_n - TS)x\| &\le \|(T_nS_n - T_nS)x\| + \|(T_nS - TS)x\| \\ &\le \|T_n\|\ \|(S_n - S)x\| + \|(T_n - T)Sx\| < \varepsilon.\end{aligned}$$ ◇

这个结果中序列换成网未必成立，而且对弱算子拓扑也未必成立.

例 I.6.2 设 $S,\ S^*$ 如例 I.6.1 给定，取 $T_n = (S^*)^n,\ S_n = S^n,\ n = 1,\ 2,\ \cdots$. 由例 I.6.1 可见 $T_n \to 0$(WOT)，且 $S_n \to 0$(WOT). 事实上，$\forall x,\ y \in l^2$，

$$|(S_nx,\ y)| = |(x,\ S_n^*y)| = |(x,\ (S^*)^ny)| \to 0,\ n \to \infty .$$

但是 $T_nS_n = (S^*)^nS^n = (S^n)^*S^n = I$ 故 $T_nS_n \not\to 0$(WOT).

这表明 (6.2) 对弱算子拓扑不成立，因而在运用强算子拓扑与弱算子拓扑时要注意.

命题 I.6.3 设 $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ n = 1,\ 2,\ \cdots$. 若对任意 $x,\ y \in \mathcal{H}$, $\{(T_nx,\ y)\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛，则必有 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，使 $T_n \to T$(WOT).

证明 由假设，对每个 $x \in \mathcal{H}$, $\{T_nx\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathcal{H}$ 中弱连续，于是存在常数 $M_x > 0$，使 $\sup\limits_n \|T_nx\| \le M_x$. 由共鸣定理, 存在常数 $M > 0$, 使 $\|T_n\| \le M,\ n = 1,\ 2,\ \cdots$. 对 $\forall x,\ y \in \mathcal{H}$，由假设可以定义 $l(x,\ y) = \lim\limits_n (T_nx,\ y)$. 易验证 l 是 $\mathcal{H}$ 上共轭双线性泛函，又

$$|(T_nx,\ y)| \le \|T_nx\|\ \|y\| \le \|T_n\|\ \|x\|\ \|y\| \le M\|x\|\ \|y\|$$

于是 $l(x,\ y) \le M\|x\|\ \|y\|,\ \forall x,\ y \in \mathcal{H}$，即 l 是有界的. 因而存在 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，使

$$l(x,\ y) = (Tx,\ y),\ \forall x,\ y \in \mathcal{H}$$

这样

$$\lim_n (T_nx,\ y) = (Tx,\ y),\ \forall x,\ y \in \mathcal{H}$$

即 $T_n \to T$(WOT). ◇

命题 I.6.4 设 $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ n = 1,\ 2,\ \cdots$. 若对任意 $x \in \mathcal{H}$, $\{T_nx\}_{n=1}^{\infty}$ 都收敛，则必有 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，使 $T_n \to T$(SOT).

证明 显然，$\forall x,\ y \in \mathcal{H}$，$\{(T_nx, y)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛. 根据命题 I.6.3，存在 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 使得 $T_n \to T$(WOT). 对 $x \in \mathcal{H}$，可设 $\{T_nx\}_{n=1}^{\infty} \to y_0$. 于是 $(y_0, y) = \lim\limits_{n\to\infty} (T_nx, y) = (Tx, y)$，$\forall y \in \mathcal{H}$. 所以 $y_0 = Tx$. 故 $T_n \to T$(SOT). ◇

练 习 题

1 设 $(X,\mathcal{T})$ 是一个拓扑空间. 令 $\widetilde{X}=\{\infty\}\cup X$ ， $\widetilde{\mathcal{T}}=\{G\subset\widetilde{X}:G\in\mathcal{T}$, 或 $\infty\in G$ 且 $X\setminus G$ 是 X 中紧的闭集 $\}$. 证明： $(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{T}})$ 是一个紧拓扑空间.

2 设 X 是一个拓扑空间， $A\subset X$. 称 A 为连通的，如果不存在 X 的两个不交非空开子开子集 G_1, G_2 满足： $A\cap G_1\neq\emptyset$ ， $A\cap G_2\neq\emptyset$ 而且 $A\subset G_1\cup G_2$.
如果 X 本身是连通的, 则称之为一个连通的拓扑空间. 如果 $\forall x\in X$, 及 x 的开邻域 V , 存在 x 的一个连通的开邻域 U 包含于 V ，则称 X 为局部连通的.
(1) 给出一个拓扑空间 X ，它是连通的但不是局部连通的.
(2) 给出一个拓扑空间 X ，它是局部连通的但不是连通的.
(3) X 的一个极大连通子集如果是开子集则称之为 X 的一个连通分支. 证明： X 的每个连通分支都是闭子集，而且不同的连通分支的交集为空集.
(4) 如果 X 是局部连通的，则 X 等于它的所有连通分支的并.

3 设 X 为一个 Hausdorff 空间， $A\subset X$ ， $x_0\in X$. 如果存在一个开子集 V 使得 $A\cap V=\{x_0\}$ ，则称 x_0 为 A 的一个孤立点. 证明：存在 x_0 的极小开邻域的充要条件是 x_0 是 X 的一个孤立点.

4 如果 X 是局部紧的 Hausdorff 空间，则对任意的 $x_0\in X$ 及不含 x_0 的闭子集 F ，存在开子集 V_j ， $j=1,\ 2$ ，使得 $x_0\in V_1$ ， $F\subset V_2$ ，且 $V_1\cap V_2=\emptyset$.

5 令 $X=\{x\in l^2:\ \|x\|<1\}$. 设 $\mathcal{T}$ 是 l^2 上弱拓扑. 令 $\mathcal{T}_X=\{X\cap A:\ A\in\mathcal{T}\}$. 证明： $(X,\mathcal{T}_X)$ 是一个拓扑空间，而且存在 X 上一个距离 ρ 使得 $\mathcal{T}_X$ 恰好是由 ρ 诱导的拓扑.

6 设 X 是一个拓扑空间. 证明： X 是 Hausdorff 空间的充要条件是 X 中的每个收敛网的极限都是唯一的.

7 设 S,T 是拓扑空间， T 是 Hausdorff 空间， $f:S\to T$ 将 S 中每个收敛网都映为 T 中收敛网. 证明：对 S 中收敛于 x_0 的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 必有 $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 收敛于 $f(x_0)$.

8 设 $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ 是 X 上两个拓扑. 证明： $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2$ 的充要条件是下两个条件同时成立：
(1) $\forall x\in V_1\in\mathcal{T}_1$ ， $\exists V_2\in\mathcal{T}_2$ 使得 $x\in V_2\subset V_1$ ；
(2) $\forall x\in V_2\in\mathcal{T}_2$ ， $\exists V_1\in\mathcal{T}_1$ 使得 $x\in V_1\subset V_2$.

9 证明： l^1 中序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 弱收敛于 x_0 的充要条件是它按 l^1 中范数收敛于 x_0 . 进一步思考， l^1 上范数诱导的拓扑是否与 l^1 上弱拓扑一致.

10 在 l^2 中给出一个没有有界子网的弱收敛的网.

11 证明： l^2 中有界集都是弱预紧的. 进一步思考， l^1 中有界集是否为弱预紧的.

12 设 T 是 Banach 空间 $\mathcal{M}$ 上有界线性算子. 则 T 按 $\sigma(\mathcal{M},\mathcal{M}^*)$ 连续.

13 设 T 是自反的 Banach 空间 $\mathcal{M}$ 上有界线性算子， $B=\{x\in\mathcal{M}:\ \|x\|\leq 1\}$. 证明： $\{Tx:\ x\in\mathcal{B}\}$ 是 $\mathcal{M}$ 中闭集.

14 设 $\mathcal{X}$ 是一个 Banach 空间. 证明： $\mathcal{X}$ 在它的二次对偶空间 $\mathcal{X}^{**}$ 中按 $\sigma(\mathcal{X}^{**},\mathcal{X}^*)$ 稠密.

15 设 f 是 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 上线性泛函. 证明： f 按范数拓扑连续的充要条件是 f 按 $\mathcal{X}$ 上弱拓扑连续.

16 设 $\mathcal{M}$ 是 Banach 空间 $\mathcal{X}$ 的线性子流型， $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{X}^*$ 的线性子流行.

(1) 证明： $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{X}$ 中按范数拓扑闭的充要条件是它按弱拓扑闭.

(2) 思考 $\mathcal{N}$ 在 $\mathcal{X}^*$ 中按范数拓扑闭与它按 $\sigma(\mathcal{X}^*,\mathcal{X})$ 闭是否一致.

17 设 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上一列正交射影.

(1) 若 WOT$-\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$ ，则 P 是正算子，即 $(Px,x)\geq 0,\ \forall\, x\in\mathcal{H}$. 举例说明 P 可能既不为 0 也不是正交射影.

(2) 若更设 P 是正交射影，则 SOT$-\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$.

(3) 若 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调的 (即要么 $P_n - P_{n+1}$ 是正算子， $\forall\, n\geq 1$ ，要么 $P_{n+1}-P_n$ 是正算子， $\forall\, n\geq 1$)，则 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按强算子拓扑收敛于某个正交射影.

18 设 X 是一个拓扑空间. 如果它有一个可数子集是稠密的，则称 X 为可分的. 如果 X 有一个可数的拓扑基，则称 X 为第二可数的. 证明：每个可分的距离空间都是第二可数的.

19 设 X 是 σ 紧的距离空间，那么 X 是可分的.

第二章　测度论概述

II.1 抽象测度

“测度”概念是面积、体积概念的推广. 引进测度是为了建立积分，因此就要求对整个空间进行分划，使整个空间分成有测度的子集之并，而且不相交子集之并的测度等于各个子集测度之和. 正是这个基本要求使我们在引进测度时对可以定义测度的子集要做一些规定，了解了这点对下面 $\sigma-$代数 的定义就不会感到奇怪了.

定义 II.1.1 设 M 是一个非空集合， $\mathcal{R}$ 表示由 M 的子集组成的非空类，如果

(a) $A_i \in \mathcal{R},\ i=1,2,\cdots,$ 蕴含 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$;

(b) $A,B \in \mathcal{R},$ 蕴含 $A\setminus B \in \mathcal{R}$,

则称 $\mathcal{R}$ 为 $\sigma-$环，这里 $A\setminus B = A\cap B^{\mathrm{c}}$ (B^{c} 表示 B 之余集) .

若还有 $M\in\mathcal{R}$ ，称 $\mathcal{R}$ 为 σ- 代数 .

以后常用 $\mathcal{F}$ 表示 $\sigma-$代数 ，这时 $<M,\mathcal{F}>$ 称为 可测空间 . $\mathcal{F}$ 中元称为 可测集 . 注意，这时 $<M,\mathcal{F}>$ 上并未定义测度.

设 $\mathcal{L}$ 表示 $\mathcal{R}^n$ 中全体 Lebesgue 可测集，则 $\mathcal{L}$ 是一个 $\sigma-$代数 ，而 $<\mathcal{R}^n,\mathcal{L}>$ 就是一个可测空间. 任给一个非空集合 M ，其上都有两个 $\sigma-$代数 ，一个是由 M 的所有子集组成的，一个是 $\{\emptyset, M\}$ ，这两个平凡的 $\sigma-$代数 ，对我们来说没有多大意义.

由 $\sigma-$代数 定义可知,若 $E\in\mathcal{F}$,则其余集 $E^{\mathrm{c}} = M\setminus E \in \mathcal{F}$. 另外,若 $A_n\in\mathcal{F}, n=1,2,\cdots,$ 则 $A_n^{\mathrm{c}}\in\mathcal{F},\ n=1,2,\cdots$. 从而， $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$ ，则 $(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. 这说明 $\sigma-$代数$\mathcal{F}$ 对取余集和可数交运算是封闭的. 注意由定义很容易看出 $\emptyset\in\mathcal{F}$ ，从而 $\mathcal{F}$ 在有限交和有限并运算下也一定封闭.

定义 II.1.2 设 $<M,\mathcal{F}>$ 是可测空间, μ 是定义在 $\mathcal{F}$ 上的非负函数,而且是 可数可加的 ,即：对任何一串两两不交的可测集 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，总有

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) ,$$

则称 μ 是 $<M,\mathcal{F}>$ 上 正测度 ，称 $<M,\mathcal{F},\mu>$ 为 正测度空间 ，有时也说 μ 是 M 上正测度.

注意这里 μ 的值允许取 $+\infty$ ，但总假定有 $A\in\mathcal{F}$ ，使 $\mu(A)<+\infty$ ，这样正测度才有意义.

注 (i) $\mu(\emptyset)=0$. 事实上，取 $A_1=A$ 使 $\mu(A_1)<+\infty$ ，而 $A_2=A_3=\cdots=\emptyset$ ，则由可数可加性

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu(A) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu(\emptyset) .$$

而 $\mu(A)<+\infty,\ \mu(\emptyset)\geq 0$ ，可见只有 $\mu(\emptyset)=0$.

(ii) μ 是有限可加的，设 $A_1,\cdots,A_n$ 是两两不交的可测集，取 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\emptyset$ ，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ ，由可数可加性及 (i) ，

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) .$$

(iii) 正测度是单调递增的，即若 $A,B\in\mathcal{F},A\subseteq B$ ，则 $\mu(A)\le\mu(B)$.

事实上，取 $C=B\setminus A$, 则 $C\cap A=\emptyset$, 且 $B=A\cup C$ ，于是由 (ii) ， $\mu(B)=\mu(A)+\mu(C)\ge\mu(A)$.

(iv) 设 $A,B\in\mathcal{F},A\subseteq B,\mu(A)<+\infty,C=B\setminus A$ ，则 $\mu(C)=\mu(B)-\mu(A)$.

事实上，由于 $A\cap C=\emptyset,\ B=A\cup C$ ，所以 $\mu(B)=\mu(A)+\mu(C)$. 而 $\mu(A)<+\infty$ ，故 $\mu(C)=\mu(B)-\mu(A)$.

例 II.1.1 取 $M=\{1,2,3,\cdots\},\mathcal{F}$ 是 M 之所有子集. 若 $A\in\mathcal{F}$ ，令 $\mu(A)$ 表示 A 之基数，对有限集 A 来说，即 A 中元素的个数，则 μ 是 $<M,\mathcal{F}>$ 上一个测度.

例 II.1.2 取 $M=[0,1],\mathcal{L}$ 是 $[0,1]$ 中全体 Lebesgue 可测集, 设 f 是 $[0,1]$ 上非负 Lebesgue 可测函数，对 $E\in\mathcal{L}$ ，定义

$$\mu_f(E)=\int_E f(x)dx\ .$$

这里右端表示的是 Lebesgue 积分，则 μ_f 是 $<M,\mathcal{L}>$ 上正测度，显然当 f 不同时， μ_f 是不同的. 这件事说明在同一个可测空间上可以有不同的测度.

定理 II.1.1 设 $<M,\mathcal{F}>$ 是正测度空间， $A_n\in\mathcal{F},n=1,2,\cdots$.

(a) 若 $A_n\nearrow A$ ，即 $A_1\subset A_2\subset\cdots,\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A$ ，则 $\mu(A_n)\nearrow\mu(A)$.

(b) 若 $A_n\searrow A$ ，即 $A_1\supset A_2\supset\cdots,\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A$ ，又 $\mu(A_1)<\infty$ ，则 $\mu(A_n)\searrow\mu(A)$.

证明 (a) 令 $E_1=A_1,E_n=A_n\setminus A_{n-1},n\ge2$ ，则 $E_n\in\mathcal{F},n=1,2,\cdots$ ，是两两不交的. 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{m}E_n=A_m,\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n=A$ ，由 μ 之可加性,

$$\mu(A_m)=\mu(\bigcup_{n=1}^{m}E_n)=\sum_{n=1}^{m}\mu(E_n)\ ,$$

$$\mu(A)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\ .$$

显然 $\sum\limits_{n=1}^{m}\mu(E_n)\nearrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$ ，即 $\mu(A_m)\nearrow\mu(A)$.

(b) 令 $B_n=A_1\setminus A_n,n=1,2,\cdots$. 则 $B_n\nearrow A_1\setminus A$. 由 (a) ， $\mu(B_n)\nearrow\mu(A_1\setminus A)=\mu(A_1)-\mu(A)$ ，而 $\mu(B_n)=\mu(A_1)-\mu(A_n)$ ，故 $\mu(A_n)\searrow\mu(A)$. ◇

定义 II.1.3 设 $<M,\mathcal{F}>$ 是可测空间， M 上实值函数 f 称为 <u>$\mathcal{F}-$可测的</u>，若对任何 $(a,b)\subset\mathcal{R},f^{-1}((a,b))\in\mathcal{F}$. $\mathcal{F}-$ 可测的简称为 <u>可测的</u>.

定义 II.1.4 设 $<M,\mathcal{F}>$ 是可测空间， M 上复值函数 $f=u+iv$ 称为可测的，如果它的实部 u 和虚部 v 都是可测的.

容易验证，复函数可测的充要条件是对复平面 $\mathbb{C}$ 中任何开集 $G,f^{-1}(G)\in\mathcal{F}$. 证明留作习题.

引进测度和可测函数的目的是为了建立积分理论，而建立积分总是要做分划.

设 $<M,\mathcal{F}>$ 是可测空间，若 $\{A_j\}_{j=1}^n$ 是 M 之有限个可测子集合，满足

$$A_i\cap A_j=\emptyset,i\ne j,\text{且}\bigcup_{j=1}^{n}A_j=M\ .$$

则称 $\{A_j\}_{j=1}^n$ 是 M 的一个 <u>分划</u> 或 M 的一个 <u>可测分划</u> .

设 $\triangle=\{A_j\}_{j=1}^n$ 是 M 的一个可测分划，定义函数

$$S_\triangle(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j\mathcal{X}_{A_j}(x),x\in M\ .$$

其中 $a_j \in \mathcal{C}$ ， $\mathcal{X}_{A_j}$ 表示 A_j 的特征函数，即

$$\mathcal{X}_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & 当x \in A_j. \\ 0, & 当x \notin A_j. \end{cases}$$

函数 $S_\triangle$ 称为 <u>简单函数</u>．对简单函数很容易定义积分.

定义 II.1.5 设 $< M, \mathcal{F}, \mu >$ 是正测度空间． $S(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{A_j}(x)$ 是相应于分划 $\triangle = \{A_j\}_{j=1}^n$ 之非负简单函数，定义 S 关于 μ 之 <u>积分</u> 为

$$\int_M S d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j) \ ,$$

这里规定 $0 \times \infty = 0$ ．对一般非负可测函数 f ，定义 f 关于测度 μ 积分为

$$\int_M f \mathrm{d}\mu = \sup\{\int_M h \mathrm{d}\mu;\ h是非负简单函数，且h \le f\} \ .$$

当上述积分有限时，称 f 是 <u>$\mu-$可积的</u>，简称为 <u>可积的</u>．

对一般实值可测函数 f ，可分解为 $f = f^+ - f^-$ ，其中

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & 当f(x) \ge 0, \\ 0, & 当f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & 当f(x) \ge 0, \\ -f(x), & 当f(x) < 0. \end{cases}$$

易见 $|f| = f^+ + f^-$.

当 $\int_M f^+ \mathrm{d}\mu, \int_M f^- \mathrm{d}\mu$ 不全为 ∞ 时，定义 f 关于 μ 之积分为

$$\int_M f \mathrm{d}\mu = \int_M f^+ \mathrm{d}\mu - \int_M f^- \mathrm{d}\mu.$$

当积分有限时，称 f 关于 μ 是 <u>可积的</u>．

对于复值可测函数 $f = u + iv$ ，当其实部和虚部 $u,\ v$ 都关于 μ 可积时，定义 f 关于 μ 的积分为

$$\int_M f \mathrm{d}\mu = \int_M u \mathrm{d}\mu + i \int_M v \mathrm{d}\mu \ ,$$

这时称 f 关于 μ 是 <u>可积的</u>．

若 E 是 M 的可测子集，我们亦考虑 f 在 E 上的积分 $\int_E f \mathrm{d}\mu$ ．定义为

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_M \mathcal{X}_E f \mathrm{d}\mu \ .$$

这里 $\mathcal{X}_E$ 表示集合 E 的特征函数.

在上述定义下， Lebesgue 积分的许多基本性质仍然成立．譬如

(1) $\int_M cf \mathrm{d}\mu = c \int_M f \mathrm{d}\mu,\ c$ 是复常数.

(2) $\int_M (f+g) \mathrm{d}\mu = \int_M f \mathrm{d}\mu + \int_M g \mathrm{d}\mu.$

(3) $\int_{E_1 \cup E_2} f \mathrm{d}\mu = \int_{E_1} f \mathrm{d}\mu + \int_{E_2} f \mathrm{d}\mu,\ 当E_1 \cap E_2 = \emptyset.$

(4) 若 $f \le g$, 则 $\int_M f \mathrm{d}\mu \le \int_M g \mathrm{d}\mu$.

(5) 若 $f = g, [\mu] a.e$ 于M, 则 $\int_M f \mathrm{d}\mu = \int_M g \mathrm{d}\mu$.

这里 “ $[\mu]$ a.e. 于 M ” 指的是在 M 上 μ 几乎处处成立，即存在 M 之可测子集 E ，使 $\mu(E) = 0$ ，且命题在 $M \backslash E$ 上处处成立.

另外， Lebesgue 积分的一些基本定理也成立，我们不加证明地开列几条如下:

定理 II.1.2 (Levi) 设 f_n 是 M 上非负可测函数，且 $f_n(x) \nearrow f(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_M f_n \mathrm{d}\mu = \int_M f\mathrm{d}\mu .$$

定理 II.1.3 (Lebesgue) 设 f_n 是 M 上非负可测函数，则

$$\int_M \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_M f_n\mathrm{d}\mu .$$

定理 II.1.4 (Fatou 引理) 设 $f_n(n=1,\ 2,\cdots)$ 是 M 上非负可测函数，则

$$\int_M (\varliminf_n f_n)\mathrm{d}\mu \leq \varliminf_n \left(\int_M f_n \mathrm{d}\mu\right) .$$

定理 II.1.5 (Lebesgue 控制收敛定理) 设 f_n 是 M 上复可测函数， $n=1,\ 2,\ \cdots$，

$$\lim_n f_n(x) = f(x), [\mu] \text{ a.e. 于} M .$$

如果存在 M 上非负可积函数 $F(x)$，使 $|f_n(x)| \leq |F(x)|,\ [\mu]$ a.e. 于$M, n=1,2,\cdots$，则 f 亦是 M 上可积函数，且

$$\int_M |f_n - f|\mathrm{d}\mu \to 0 .$$

两个函数 $f,\ g$ 称为等价的，若

$$f(x) = g(x),\ [\mu] \text{ a. e. 于} M .$$

M 上全体复值可积函数之等价类集合记作 $L^1(M,\mathcal{F},\mu)$，简记为 $L^1(\mu)$，即 $\forall f \in L^1(\mu)$，代表了与 f 几乎处处相等 (关于 $[\mu]$) 的函数的全体.

命题 II.1.6 设 $< M,\mathcal{F},\mu >$ 是正测度空间， f 是 M 上非负可测函数，定义

$$\nu(E) = \int_E f\mathrm{d}\mu, \forall E \in \mathcal{F} . \tag{1.1}$$

ν 是 $< M,\mathcal{F} >$ 上正测度，而且对 M 上任何非负可测函数 g，总有

$$\int_M g\mathrm{d}\nu = \int_M gf\mathrm{d}\mu . \tag{1.2}$$

这个等式可以写成 $d\nu = fd\mu$.

证明 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是两两不交可测集序列，则

$$\mathcal{X}_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A_n} f .$$

于是

$$\begin{aligned}\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} f\mathrm{d}\mu = \int_M \mathcal{X}_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} f\mathrm{d}\mu = \int_M (\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{X}_{A_n} f)\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_M \mathcal{X}_{A_n} f\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)\end{aligned}$$

这说明 ν 是可数可加的，从而 ν 是 $\langle M,\mathcal{F}\rangle$ 上正测度，下面只须证明 (1.2) 式成立.

首先，容易验证对非负简单函数 (1.2) 成立. 对一般非负可测函数 g，可取一列非负简单函数 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调上升到 g . 从而 $\{g_n f\}_{n=1}^{\infty} \nearrow gf$. 而已证

$$\int_M g_n\mathrm{d}\nu = \int_M g_n f\mathrm{d}\mu .$$

令 $n \to \infty$，根据 Levi 定理，可见

$$\int_M g\mathrm{d}\nu = \int_M gf\mathrm{d}\mu.$$

◇

这个命题告诉我们，由测度 μ 按 (1.1) 式可以产生一个新测度 ν，而且当 $\mu(E)=0$ 时，必有 $\nu(E)=0$. 现在把这个性质加以总结，引进如下概念.

定义 II.1.6 设 $\mu,\ \nu$ 都是可测空间 $\langle M,\ \mathcal{F}\rangle$ 上正测度，如果对 $\forall E \in \mathcal{F}$， $\mu(E)=0$ 蕴含 $\nu(E)=0$，则称 ν 关于 μ 绝对连续，记作 $\nu \ll \mu$.

这样对命题 II.1.6 中由 μ 得到的 ν 必有 $\nu \ll \mu$. 现在有个问题，若 $\nu \ll \mu$ ，是否一定存在某个非负可测函数 f ，使 ν 可表成

$$\nu(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu, \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

一般说来这并不成立，但只须两个测度都是 σ- 有限的，结果就成立. 这便是著名的 Radon-Nikodym 定理.

定义 II.1.7 设 μ 是 $\langle M, \mathcal{F} \rangle$ 上正测度，若 $\mu(M) < \infty$ ，则称 μ 是 有限的；若存在 M 之可测子集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $\mu(A_n) < \infty$ ， $\forall n \geq 1$ ，则称 μ 是 σ- 有限的 .

n 维欧氏空间上的 Lebesgue 测度就不是有限的，而是 σ- 有限的.

定理 II.1.7 (Radon-Nikodym) 设 μ, ν 都是 $\langle M, \mathcal{F} \rangle$ 上 σ- 有限的正测度，则 $\nu \ll \mu$ 的充要条件是存在 M 上 μ 几乎处处取有限值的非负可测函数 f ，使

$\nu(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu, \ \forall E \in \mathcal{F}$.

而且 f 在 $[\mu]a.e.$ 于 M 意义下唯一确定. 这个 f 称为 ν 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数 .

证明参见 W. Rudin[5] 第 122 页.

注 (a) 在每个 ν- 测度有限集上， f 是 μ 可积的.

(b) 特别地，当 ν 是有限测度时， $f \in L^1(\mu)$.

(c) 类似命题 II.1.6 证明，对任何 $g \in L^1(\nu)$ 都有

$\int_M g \mathrm{d}\nu = \int_M g f \mathrm{d}\mu$.

定义 II.1.8 设 μ, ν 是 $\langle M, \mathcal{F} \rangle$ 上两个正测度，如果有 $A \in \mathcal{F}$ 使得

$\mu(A) = 0$ 且 $\nu(A^c) = 0$ ，

则称 μ 与 ν相互奇异 ，记为 $\mu \perp \nu$.

上面的条件是说 μ 集中在 A^c 上，而 ν 集中在 A 上.

两个测度之间未必有相互奇异或一个关于另一个绝对连续的关系，不过总可以以其中一个作标准，将另一个分解成两个部分，一部分绝对连续，另一部分奇异.

定理 II.1.8 (Lebesgue 分解定理) 设 μ, ν 都是 $\langle M, \mathcal{F} \rangle$ 上 σ- 有限的正测度，则存在唯一的一对 σ- 有限的正测度 ν_{ac} 和 ν_s 使得

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s, \ \ \nu_{ac} \ll \mu, \ \ \nu_s \perp \mu, \ \text{且} \nu_{ac} \perp \nu_s.$$

证明见 W. Rudin[5] 第 122 页.

通常我们总以 Lebesgue 测度做标准，将给定的测度进行分解. 在今后应用中，不仅用到正测度，而且用到更一般的测度. 为此引进下面概念.

定义 II.1.9 设 $\langle M, \mathcal{F} \rangle$ 是可测空间， μ 是 σ- 代数 $\mathcal{F}$ 上实值可数可加函数，而且 $+\infty$ 与 $-\infty$ 只允许取到至多一个，则称 μ 为一个 实测度 .

注意，实测度不再有单调性.

定义 II.1.10 设 $\langle M, \mathcal{F} \rangle$ 是可测空间， μ 是 σ- 代数 $\mathcal{F}$ 上取值为复数的可数可加函数，则称 μ 为 $\langle M, \mathcal{F} \rangle$ 上的一个 复测度 .

设 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ ， $E_i \cap E_j = \emptyset$ ，当 $i \neq j$ ，则

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

如果 $\mu(E)$ 有限，表明右端级数收敛．若将 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 重新排序，由可数可加性，右端级数仍收敛到同一值 $\mu(E)$ ．所以右端级数是无条件收敛的，从而绝对收敛．这样可以引进如下概念．

定义 II.1.11 设 μ 是 $\langle M, \mathcal{F} \rangle$ 上复测度 (包括只取有限值的实测度)，定义

$$|\mu|(E) \triangleq \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| : \{E_n\}_{n=1}^{\infty}\text{是}E\text{之任意可测分划}\}$$

称 $|\mu|$ 为 μ 之 <u>全变差测度</u> .

定理 II.1.9 设 μ 是 $\langle M, \mathcal{F} \rangle$ 上复测度，则

(a) $|\mu|$ 是正测度.

(b) $|\mu|(E) \geq |\mu(E)|$ ， $\forall E \in \mathcal{F}$.

(c) $|\mu|(M) < \infty$.

证明 (a) 只须证 $|\mu|$ 是可数可加的．设 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是两两不交的可测子集列，且 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ ，对任意 $\varepsilon > 0$ ，由 $|\mu|$ 之定义，存在 E_n 之可测分划 $\{E_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ 使得

$$|\mu|(E_n) - \tfrac{\varepsilon}{2^n} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_{n,j})| ,$$

$n = 1,\ 2,\ \cdots$ ．注意到 $\{E_{n,j} : n \geq 1, j \geq 1\}$ 是 E 之可测分划，故

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n) - \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_{n,j})| \leq |\mu|(E) .$$

由 ε 之任意性，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n) \leq |\mu|(E) .$$

往证相反的不等式．设 $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 E 之任意可测分划，取定 j ， $\{A_j \cap E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A_j 的可测分划，对每个 n ， $\{A_j \cap E_n\}_{j=1}^{\infty}$ 是 E_n 之可测分划，故

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| &= \sum_{j=1}^{\infty} |\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_j \cap E_n)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_n)| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n). \end{aligned}$$

关于 E 之可测分划 $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ 取上确界，可得

$$|\mu|(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n) .$$

(b) 由 $|\mu|$ 之定义即知 ($\{E\}$ 就是 E 之一个可测分划) .

(c) 令

$$\mu_1(E) = \mathrm{Re}\mu(E) = \tfrac{1}{2}[\mu(E) + \overline{\mu(E)}] ,$$
$$\mu_2(E) = \mathrm{Im}\mu(E) = \tfrac{1}{2i}[\mu(E) - \overline{\mu(E)}] ,$$

$\forall E \in \mathcal{F}$ ．容易验证， μ_1, μ_2 都是只取有限值的实测度，而且 $\mu = \mu_1 + \mathrm{i}\mu_2$ ．分别称 μ_1, μ_2 为 μ 之实部与虚部．注意

$$|\mu(E)| \leq |\mu_1(E)| + |\mu_2(E)|$$

$\forall E\in\mathcal{F}$. 易见

$$|\mu|(E)\le|\mu_1|(E)+|\mu_2|(E)\ ,$$

$\forall E\in\mathcal{F}$. 因此，若 $|\mu|(M)=+\infty$ ，必有 $|\mu_1|(M)=+\infty$ 或 $|\mu_2|(M)=+\infty$. 不妨设 μ 本身就是只取有限值的实测度.

用反证法证明 (c) 成立. 我们分两步来完成.

(一) 先证：$\forall E\in\mathcal{F}$ ，若 $|\mu|(E)=+\infty$ ，则必有 E 之可测分划 $\{A,\ B\}$ 使得 $|\mu(A)|>1$ ，且 $|\mu|(B)=+\infty$.

事实上，由假设，必存在 E 之可测分划 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\mu(E_n)|>t\overset{\triangle}{=}2(1+|\mu(E)|)\ .$$

取充分大的 n 使得

$$\sum_{j=1}^{n}|\mu(E_j)|>t\ .$$

设 $N^+=\{j:1\le j\le n且\mu(E_j)\ge0\}$ ， $N^-=\{j:1\le j\le n且\mu(E_j)<0\}$. 那么下面两个不等式至少有一个为真

$$|\sum_{j\in N^+}\mu(E_j)|>\tfrac{t}{2}$$

或

$$|\sum_{j\in N^-}\mu(E_j)|>\tfrac{t}{2}\ .$$

不妨设第一个不等式为真. 令 $E^+=\bigcup_{j\in N^+}E_j,\ E^-=E\setminus E^+$. 那么 $\{E^+,E^-\}$ 是 E 之可测分划，且

$$|\mu(E^+)|=|\sum_{j\in N^+}\mu(E_j)|>\tfrac{t}{2}=1+|\mu(E)|\ge1\ .$$

而

$$|\mu(E^-)|=|\mu(E)-\mu(E^+)|\ge|\mu(E^+)|-|\mu(E)|\ge1\ .$$

又由 (a)

$$|\mu|(E)=|\mu|(E^+)+|\mu|(E^-)\ .$$

而 $|\mu|(E)=+\infty$ ，故 $|\mu|(E^+)$ 与 $|\mu|(E^-)$ 至少有一个为 $+\infty$. 取使 $|\mu|$ 为 $+\infty$ 的 E^+ 或 E^- 为 B ，另一个为 A ，可见论断 (一) 成立.

(二) 假设 $|\mu|(M)=+\infty$, 令 $B_0=M$. 由 (一) 可取 B_0 之可测分划 $\{A_1,B_1\}$ 使 $|\mu(A_1)|>1$ 且 $|\mu|(B_1)=+\infty$. 再由 (一) 又有 B_1 之可测分划 $\{A_2,B_2\}$ 使 $|\mu(A_2)|>1$ 且 $|\mu|(B_2)=+\infty$. 以此类推，由归纳法可取 M 之两两不交的可测子集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $|\mu(A_n)|>1$ ， $\forall n\ge1$. 由可数可加性，

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\ .$$

而 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)$ 是有限的. 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ 收敛，进而 $\mu(A_n)\to0$. 这矛盾与 $|\mu(A_n)|\ge1$ ，$\forall n\ge1$. 这说明必有 $|\mu|(M)<+\infty$. ◇

根据定理 II.1.9，复测度总是有界的，即 $|\mu(E)|\le|\mu|(E)\le|\mu|(M)<+\infty$ ， $\forall E\in\mathcal{F}$. 称 $|\mu|(M)$ 为 μ 之 全变差.

关于测度的绝对连续可以推广. 设 λ 是 $\langle M,\mathcal{F}\rangle$ 上正测度， μ 是 $\langle M,\mathcal{F}\rangle$ 上一个复测度. 若 $\forall E\in\mathcal{F}$ ， $\lambda(E)=0$ 蕴涵 $\mu(E)=0$ ，则称 μ 关于 λ 绝对连续，记作 $\mu\ll\lambda$.

命题 II.1.10 设 μ 是 $\langle M,\mathcal{F}\rangle$ 上复测度，则 $\mu \ll |\mu|$ ，且 μ 关于 $|\mu|$ 的 Radon-Nikodym 导数 f 满足 $|f|\equiv 1$ ，即

$$\mathrm{d}\mu = f\mathrm{d}|\mu|, \quad |f|\equiv 1 .$$

这称为 μ 之极分解.

证明参见 W. Rudin[5]124 页.

对 $\langle M,\mathcal{F}\rangle$ 上两个复测度 μ_1 和 μ_2 ，复数 c ，定义

$$(\mu_1+\mu_2)(E)=\mu_1(E)+\mu_2(E) ,$$
$$(c\mu_1)(E)=c\mu_1(E) ,$$

$\forall E\in\mathcal{F}$. 容易验证 $\mu_1+\mu_2$ 和 $c\mu_1$ 仍是 $\langle M,\mathcal{F}\rangle$ 上复测度.

考虑 $\langle M,\mathcal{F}\rangle$ 上全体复测度，按上述定义的加法和数乘形成一个线性空间. 令

$$\|\mu\| = |\mu|(M) .$$

那么 $\|\cdot\|$ 是一个范数，它使这个空间成为 Banach 空间. 细节见 II.3.

任给一个复测度 μ ，它可以分解为两个有限实测度之线性组合. 令

$$\mu_R(E)=\tfrac{1}{2}(\mu(E)+\overline{\mu(E)})$$
$$\mu_I(E)=\tfrac{1}{2i}(\mu(E)-\overline{\mu(E)}),$$

$\forall E\in\mathcal{F}$. 则 μ_R 和 μ_I 都是 $\langle M,\mathcal{F}\rangle$ 上只取有限值的实测度，而且

$$\mu=\mu_R+\mathrm{i}\mu_I .$$

给定 $\langle M,\mathcal{F}\rangle$ 上只取有限值的实测度 μ ，令

$$\mu^+=\tfrac{1}{2}(|\mu|+\mu) ,\quad \mu^-=\tfrac{1}{2}(|\mu|-\mu) .$$

那么 μ^+ 和 μ^- 都是 $\langle M,\mathcal{F}\rangle$ 上正测度，而且

$$\mu=\mu^+-\mu^- ,\quad |\mu|=\mu^++\mu^- .$$

将 μ 表为 μ^+ 与 μ^- 之差，称为 μ 的 Jordan 分解 . μ^+ 与 μ^- 分别称为 μ 的 正部 与 负部 .

对复测度有了如上分解，关于正测度的积分的概念可以推广到一般的测度.

首先设 μ 是实测度， u 是 M 上实值可测函数. 设 $\mu=\mu^+-\mu^-$ 是 μ 的 Jordan 分解. 若 $\int_M u\mathrm{d}\mu^+$ 与 $\int_M u\mathrm{d}\mu^-$ 都存在且至少有一个有限，则定义

$$\int_M u\mathrm{d}\mu=\int_M u\mathrm{d}\mu^+-\int_M u\mathrm{d}\mu^- ,$$

称之为 u 关于 μ 之积分.

设 $\mu=\mu_1+i\mu_2$ ，这里 μ_1 和 μ_2 分别是 μ 之实部与虚部， u 是实可测函数，如果 $\int_M u\mathrm{d}\mu_1$ 与 $\int_M u\mathrm{d}\mu_2$ 都存在且有限，则定义

$$\int_M u\mathrm{d}\mu=\int_M u\mathrm{d}\mu_1+i\int_M u\mathrm{d}\mu_2 ,$$

称为 u 关于 μ 之积分.

设 $f=u+iv$ 是复可测函数， u 和 v 分别是 f 的实部和虚部，如果 $\int_M u\mathrm{d}\mu$ 和 $\int_M v\mathrm{d}\mu$ 都存在，定义

$$\int_M f\mathrm{d}\mu=\int_M u\mathrm{d}\mu+i\int_M v\mathrm{d}\mu ,$$

称为 f 关于 μ 之积分.

这样，一个复函数关于复测度积分有意义. 前述的关于正测度积分的基本性质，除去 (4) 款之外都成立. 关于 Lebesgue 控制收敛定理等也成立. 但是 Levi 定理及 Fatou 引理不再成立.

Lebesgue 积分理论中有一个著名的 Fubini 定理，保证了重积分化累次积分和累次积分换序．对抽象测度积分， Fubini 定理亦真．为介绍它，需要“两个 σ- 代数乘积 ”的概念.

设 $\langle X,\mathcal{R},\mu\rangle$ 和 $\langle Y,\mathcal{F},\nu\rangle$ 是两个正测度空间， $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{F}$ 都是 σ- 代数，令

$$\mathcal{R}\times\mathcal{F}=\{R\times F:\ R\in\mathcal{R},\ F\in\mathcal{F}\}.$$

这是空间 $X\times Y$ 中一个子集族，它未必是 σ- 代数．考虑包含 $\mathcal{R}\times\mathcal{F}$ 的最小的 σ- 代数，即由 $\mathcal{R}\times\mathcal{F}$ 生成的 σ- 代数，记为 $\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}$ ，称为 $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{F}$ 的 乘积 σ- 代数．需要注意的是 $\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}$ 中元素未必能表成 $R\times F$ ， $R\in\mathcal{R}$ ， $F\in\mathcal{F}$ 形式．例如，设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{R}$ 上全体 Lebesgue 可测集构成的 σ- 代数，则 $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}$ 中元都是 $\mathbb{R}^2$ 中 Lebesgue 可测的． $\mathbb{R}^2$ 中开单位圆属于 $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}$ ，但它不能表成两个 $\mathbb{R}$ 中 Lebesgue 可测集之乘积.

我们称 $\langle X\times Y,\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}\rangle$ 为 $\langle X,\mathcal{R}\rangle$ 与 $\langle Y,\mathcal{F}\rangle$ 之 乘积可测空间．设 $f(x,y)$ 是 $X\times Y$ 上函数．如果 f 是 $\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}$- 可测的，则对每个 $x\in X$ ， $f(x,y)$ 是关于 $y\in Y$ 的 $\mathcal{F}$- 可测的，且对每个 $y\in Y$ ， $f(x,y)$ 是关于 $x\in X$ 的 $\mathcal{R}$- 可测的.

定理 II.1.11 (Fubini) 设 $f(x,y)$ 是 $X\times Y$ 上 $\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}$- 可测函数，则

$$\int_X\int_Y|f(x,y)|\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x)<+\infty$$

当且仅当

$$\int_Y\int_X|f(x,y)|\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)<+\infty.$$

此外，若一个积分有限，则两者相等.

定理 II.1.12 设 μ 和 ν 都是 σ- 有限的正测度，则 $\langle X\times Y,\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}\rangle$ 上存在唯一的正测度 $\mu\times\nu$ 使得

$$(\mu\times\nu)(R\times F)=\mu(R)\nu(F)$$

$\forall R\in\mathcal{R},\ F\in\mathcal{F}$.

若 f 是 $X\times Y$ 上 $\mathcal{R}\otimes\mathcal{F}$- 可测的，则

$$\int_{X\times Y}|f|\mathrm{d}(\mu\times\nu)<+\infty$$

当且仅当

$$\int_X\int_Y|f(x,y)|\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x)<+\infty.$$

条件成立时，

$$\int_{X\times Y}|f|\mathrm{d}(\mu\times\nu)=\int_X\int_Y|f(x,y)|\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x).$$

以上两个定理的证明参见 W. Rudin[5] 第八章.

II.2 欧氏空间上的 Borel 测度与 Borel 函数

上节引进抽象测度空间 $\langle M,\mathcal{F},\mu\rangle$ ，其中 M 只是一般集合，其上未必有拓扑．泛函分析考虑的对象总是具有拓扑结构的，因而有极限和连续概念，在建立积分时总希望连续函数有积分，因此可测函数总应该包含连续函数．了解这件事就不难理解为什么我们对如下的 σ- 代数特别感兴趣．为了简单，这一节只讨论 n 维欧氏空间.

定义 II.2.1 $\mathbb{R}^n$ 中全体开集生成的 σ- 代数，即包含全体开集的最小的 σ- 代数，称为 Borel 代数，记为 $\mathcal{B}^{(n)}$. $\mathcal{B}^{(n)}$ 中元素称为 Borel 集合． $\mathcal{B}^{(n)}$ 可测函数称为 Borel 函数 .

由定义，开集、闭集、 F_σ 型集、 G_δ 型集等都是 Borel 集，而且 Borel 集都是 Lebesgue 可测集，但 Lebesgue 可测集未必是 Borel 集．凡连续函数都是 Borel 函数．

定义 II.2.2 Borel 代数 $\mathcal{B}^{(n)}$ 上的正测度 μ 称为 正 Borel 测度，如果对所有的紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 都有 $\mu(K) < +\infty$ ．

因为 $\mathbb{R}^n$ 可表为可数个紧集之并，因而正 Borel 测度都是 σ- 有限的．显然 Lebesgue 测度是一个 Borel 测度．

像 §II.1 一样可以定义 $\mathbb{R}^n$ 上实的 Borel 测度和复的 Borel 测度，统称为 Borel 测度．在这一节我们只讨论正 Borel 测度．

定理 II.2.1 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel 测度 μ 一定是 正则的 ，即对每个 $B \in \mathcal{B}^{(n)}$ 都有

$$\mu(B) = \inf\{\mu(G) : G \supset B\text{是开集}\} \qquad \text{(外正则性)}$$

和

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B\text{是紧集}\}\ . \qquad \text{(内正则性)}$$

证明参见 W. Rudin[5] 第 48 页．

定义 II.2.3 设 m 是 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 测度， μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上 Borel 测度．

(1) 如果 $\mu \ll m$ ，则称 μ 是绝对连续的．

(2) 如果 $\mu \perp m$ ，则称 μ 是奇异的．

根据 §II.1 的 Lebesgue 分解定理，对每个 Borel 测度 μ 存在唯一分解

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_s\ ,\quad \mu_{ac} \ll m\ ,\quad \mu_s \perp m\ ,\quad \mu_{ac} \perp \mu_s.$$

其中 μ_{ac} 和 μ_s 分别称为 μ 之 绝对连续部分 和 奇异部分 ．又由 Radon-Nikodym 定理， Borel 测度 μ 是绝对连续的当且仅当存在 (按 Lebesgue 测度) 几乎处处有限的非负 Borel 函数 f 使得 $\mu(B) = \int_B f(x)\mathrm{d}x$ ， $\forall B \in \mathcal{B}^{(n)}$ ．

定义 II.2.4 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上 Borel 测度．

(1) 如果 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ， $\mu(\{x\}) = 0$ ，则称 μ 是连续的．

(2) 如果存在 $\mathbb{R}^n$ 的子集 P 使 μ 集中在 P 上 (即 $\mu(P^c)$=0) ，且 $\mu(\{x\}) > 0$ ， $\forall x \in P$ ，则称 μ 是 纯点的(或 原子的) ．

注意，一个 Borel 测度可能既非连续的，亦非原子的，但总可以表成这样两个测度之和．

定理 II.2.2 $\mathbb{R}^n$ 上每个 Borel 测度 μ 可唯一分解为

$$\mu = \mu_c + \mu_{pp}\ ,$$

其中 μ_c 是连续的， μ_{pp} 是原子的．

证明 令

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu\{x\} > 0\}\ ,$$

称之为 μ 之 纯点集 ．首先须证 P 是至多可数的．令 $I_k = \{x = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) : |\alpha_j| \le k, 1 \le j \le n\}$ ，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k = \mathbb{R}^n$ ．于是 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (P \cap I_k) = P$ ．令

$$P_{k,j} = \{x \in P \cap I_k : \mu(\{x\}) > \tfrac{1}{j}\}$$

$j = 1,\ 2,\ \cdots$ ，则 $P \cap I_k = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_{k,j}$ ．如果 $P_{k,j}$ 是无穷集合，则 $\mu(P_{k,j}) = +\infty$ ．而 $P_{k,j}$ 是有界的，故 $\mu(P_{k,j}) < +\infty$ ．因此 $P_{k,j}$ 是有限集合．所以 $P \cap I_k$ 至多可数．因而 P 至多可数．

对 $B \in \mathcal{B}^{(n)}$ ，定义

$$\mu_{pp}(B)=\mu(B\cap P)=\sum_{x\in B\cap P}\mu(\{x\})\ .$$

容易验证 μ_{pp} 是 $\mathbb{R}^n$ 上正测度，而且 $\mu_{pp}(B)\le\mu(B)$. 因而，对任意紧集 K ， $\mu_{pp}(K)<+\infty$. 故 μ_{pp} 是一个正 Borel 测度.

对 $\forall B\in\mathcal{B}^{(n)}$ ，如果 $\mu(B)<+\infty$ ，定义

$$\mu_c(B)=\mu(B)-\mu_{pp}(B)\ .$$

对一般的 $B\in\mathcal{B}^{(n)}$ ，存在可测分划 $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $B=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}B_j$ 且 $\mu(B_j)<+\infty$ ， $\forall j\ge 1$. 定义

$$\mu_c(B)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_c(B_j)\ .$$

可以证明， $\mu_c(B)$ 不依赖于分划 $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ 的选取，因而定义是完善的. 进而可以证明， μ_c 是连续的正 Borel 测度，而且 $\mu=\mu_c+\mu_{pp}$. 细节省略.

往证分解 $\mu=\mu_c+\mu_{pp}$ 是唯一的. 假设 $\mu=\mu_c'+\mu_{pp}'$ ， μ_c' 是连续的， μ_{pp}' 是纯点的. 那么 $\forall x$ ，

$$\mu_{pp}(\{x\})=\mu(\{x\})=\mu_c'(\{x\})+\mu_{pp}'(\{x\})=\mu_{pp}'(\{x\})\ .$$

于是 $\{x:\mu_{pp}'(\{x\})>0\}=P$ ， $\mu_{pp}'(P^c)=0$. 因此对 $\forall B\in\mathcal{B}^{(n)}$ 有

$$\mu_{pp}(B)=\sum_{x\in B\cap P}\mu_{pp}'(\{x\})=\sum_{x\in B\cap P}\mu_{pp}(\{x\})=\mu_{pp}(B)\ .$$

所以 $\mu_{pp}'=\mu_{pp}$.

对任意 $B\in\mathcal{B}^{(n)}$ ，若 $\mu(B)<+\infty$ ， $\mu_c(B)=\mu(B)-\mu_{pp}(B)=\mu(B)-\mu_{pp}'(B)=\mu_c'(B)$. 若 $\mu(B)=+\infty$ ，取 B 之可测分划 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $\mu(B_k)<+\infty$. 那么 $\mu_c(B)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_c(B_k)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_c'(B_k)=\mu_c'(B)$. 总之， $\mu_c=\mu_c'$. ◇

定理 II.2.2 中 μ_c 是正测度，由 Lebesgue 定理又可分解为

$$\mu_c=(\mu_c)_{ac}+(\mu_c)_s.$$

其中 $(\mu_c)_{ac}$ 和 $(\mu_c)_s$ 分别是 μ_c 的绝对连续部分和奇异部分. 记 $(\mu_c)_s$ 为 μ_{sc} ，称为 μ 的奇异连续部分. 可以证明， $(\mu_c)_{ac}=\mu_{ac}$ ， $\mu_{sc}+\mu_{pp}=\mu_s$ 为 μ 的奇异部分. 这样， μ 便有如下分解

$$\mu=\mu_{ac}+\mu_{sc}+\mu_{pp}\ .$$

而且这个分解是唯一的.

下面我们以一维欧氏空间 $\mathbb{R}$ 为例简单说明一下 Borel 测度是如何生成和怎样分解的. 主要说五点.

1 Borel 测度与在 0 点取值为 0 的渐升右连续函数建立 1-1 对应关系.

设 $\alpha(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上渐升右连续函数， $\alpha(0)=0$. 记左极限 $\lim\limits_{x\to x_-}\alpha(x)$ 为 $\alpha(x_-)$. 对区间 $I=(a,b)$ ，定义

$$\mu_\alpha(I)=\alpha(b_-)-\alpha(a)\ .$$

对任意集合 $E\subset\mathbb{R}$ ，定义

$$\mu_\alpha^*(E)=\inf\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu_\alpha(I_j):I_j\text{是有界开区间，且}\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j\supset E\}\ .$$

利用 Caratheodory 等式定义 L-S 可测集. 如果对任意集合 $S\subset\mathbb{R}$

$$\mu_\alpha^*(S)=\mu_\alpha^*(S\cap E)+\mu_\alpha^*(S\setminus E)\ ,$$

则称 E 为 L-S 可测的. 全体 L-S 可测集构成一个 σ- 代数，它包含 Borel 代数. 对 L-S 可测集

E 记 $\mu_\alpha(E)=\mu_\alpha^*(E)$，称为 E 的 L-S 测度. 将 μ_α 限制在 Borel 代数上就是一个 Borel 测度.

反过来，设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上一个 Borel 测度，定义

$$\alpha(x)=\begin{cases}\mu((0,x]) & \text{当 } x>0\\ -\mu((x,0]) & \text{当 } x\le 0.\end{cases}$$

那么 $\alpha(0)=0$， $\alpha(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上渐升右连续函数. 此外， $\mu_\alpha=\mu$.

2 μ_α 是连续的当且仅当 α 是连续的.

3 μ_α 的纯点集是 α 的全体间断点构成的集合.

例 II.2.1 设 $H(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 的特征函数 (称为 Heaviside 函数)，即

$$H(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0\\ 1, & \text{当 } x\ge 0\ .\end{cases}$$

则对任何 $B\in\mathcal{B}^{(1)}$，

$$\mu_H(B)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\in B\\ 0, & \text{当 } 0\notin B\ .\end{cases}$$

μ_H 习惯上称为 Dirac δ- 测度. μ_H 是集中在 $\{0\}$ 上的纯点测度. 可以证明，对每个可积函数 f， $\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\mu_H=f(0)$.

4 μ_α 是绝对连续的当且仅当 α 是绝对连续的.

5 μ_α 是奇异的当且仅当 α 是奇异的，即 $\alpha'(x)=0$， a.e., 这里 a.e.(几乎处处) 是关于 Lebesgue 测度的.

为了今后叙述方便，我们介绍测度支集的概念.

定义 II.2.5 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上 Borel 测度，使 $\mu(G)=0$ 的最大开集之余集称为 μ 的 <u>支集</u>，记作 $\mathrm{supp}\mu$.

可以证明，一个 Borel 测度的支集是存在的. 对任意的 $E\in\mathcal{B}^{(n)}$，若 $E\cap\mathrm{supp}\mu=\emptyset$，则 $\mu(E)=0$.

例 II.2.2 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上非负连续函数，令

$$\mu(E)=\int_E f(x)\mathrm{d}x\ .$$

那么 μ 是 $\mathbb{R}$ 上正 Borel 测度，而且它的支集

$$\mathrm{supp}\mu=\mathrm{supp}f\triangleq\overline{\{x\in\mathbb{R}\ f(x)\neq 0\}}\ .$$

由此易见， Lebesgue 测度的支集是全空间.

注意，$\mathrm{supp}\mu=F$ 与 μ 集中在 F 上不是同一概念. 设 μ 集中在 F 上，未必有 $\mathrm{supp}\mu\subset F$ 或 $F\subset\mathrm{supp}\mu$.

命题 II.2.3 $\mathbb{R}^n$ 上复 (实) 函数 f 是 Borel 函数当且仅当对 $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$) 中任何 Borel 集 B，$f^{-1}(B)\in\mathcal{B}^{(n)}$.

证明 因为开集都是 Borel 集，因而充分性显然，只须证必要性. 不妨设 f 是复函数. 我们将复数域与 $\mathbb{R}^2$ 等同. 令

$$\mathcal{F}=\{B\subset\mathbb{R}^2:\ f^{-1}(B)\in\mathcal{B}^{(n)}\}\ .$$

注意，对 $\mathbb{R}^2$ 中任何子集 B 及 B_j， $j=1,2,\cdots$，下述等式总成立

$$f^{-1}(B^{\mathrm{c}})=(f^{-1}(B))^{\mathrm{c}}\ ,$$

$$f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(B_j) .$$

可见 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中包含所有开集的 σ- 代数. 由于 $\mathcal{B}^{(2)}$ 是最小的包含所有开集的 σ- 代数，故 $\mathcal{B}^{(2)} \subset \mathcal{F}$. 这样，对每个 Borel 集 $B \in \mathcal{B}^{(2)}$ ，必有 $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^{(n)}$. ◇

据此可知，复平面上两个 Borel 函数之复合仍是 Borel 函数. 事实上，设 $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ，都是 Borel 函数，则它们的复合 $f \circ g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 定义如下

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) , \quad \forall x \in \mathbb{C} .$$

$\forall B \in \mathcal{B}^{(2)}$ ， $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}^{(2)}$ ，因此， $(f \circ g)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{B}^{(2)}$. 故 $f \circ g$ 是 Borel 函数.

引进一个函数类后，总是要对其进行运算，因而所考虑的函数类在运算下的封闭性是重要的. 比如连续函数的和、差、积仍是连续函数， Lebesgue 可测函数也一样，可以证明，对 Borel 函数也是对的. 容易证明

命题 II.2.4 (a) *Borel 函数类关于加法、数乘及极限运算是封闭的. 即若 f, g 是 Borel 函数，c 是常数，则 $f+g$ 和 cf 也是 Borel 函数. 若 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列 Borel 函数，$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ ，$\forall x \in \mathbb{R}^n$ ，则 f 亦是 Borel 函数.*

(b) *设 f 和 g 都是实 Borel 函数，则 $\min\{f,g\}$ 和 $\max\{f,g\}$ 都是 Borel 函数，从而 $|f| = \max\{f, -f\}$ 亦是 Borel 函数. 这里*

$$\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\} ,$$
$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} ,$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$.

在实变函数论中，Lebesgue 可测函数常常转化成连续函数来处理. 这种转化之所以可能，主要依据著名的 Lusin 定理. 现在对 Borel 函数也可以这样做，同样有所谓的 Lusin 定理.

定理 II.2.5 (Lusin) *设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的正则 Borel 测度， $E \in \mathcal{B}^{(n)}$ ， $\mu(E) < +\infty$ ， f 是 E 上 Borel 函数，则对任意正数 ε 存在紧集 $K \subset E$ 使得*

(1) $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$,

(2) *f 在 K 上连续.*

证明与实变函数论中类似，主要利用 Borel 测度之正则性.

II.3 紧 Housdorff 空间上的 Borel 测度

上节我们介绍了 n 维欧氏空间上 Borel 测度的概念, 现在我们将它推广到一般的 Hausdorff 拓扑空间上.

定义 II.3.1 *设 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间，全体 X 的开集生成的 σ- 代数 $\mathcal{B}$ ，即包含所有开集的最小的 σ- 代数，称为 Borel 代数 . $\mathcal{B}$ 中元称为 Borel 集 . X 上 $\mathcal{B}$- 可测的函数称为 Borel 函数 .*

开集、闭集以及 F_σ 型集和 G_δ 型集都是 Borel 集.

定义 II.3.2 *设 X 是 Hausdorff 拓扑空间， $\mathcal{B}$ 是 X 上的 Borel 代数，若 μ 是定义在 $\mathcal{B}$ 上的非负值可数可加函数，而且对任意紧集 K 有*

$\mu(K) < +\infty$,

则称 μ 为 X 上一个 正 Borel 测度 .

定理 II.3.1 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间，如果 X 中任何开集 G 都是 σ- 紧的，即 G 可表成可数个紧子集之并，则 X 上每个正 Borel 测度都是正则的，即对每个 Borel 集 E 都有

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\{\mu(G): G\text{是开集}, G\supset E\} \quad &(\text{外正则性})\\ &= \sup\{\mu(K): K\text{是紧集}, K\subset E\}. \quad &(\text{内正则性})\end{aligned}$$

证明参见 W. Rudin[5] 第 50 页.

和 n 维欧氏空间一样，对于 Hausdorff 空间上正则正 Borel 测度， Lusin 定理成立.

定理 II.3.2 (Lusin) 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间， μ 是 X 上正则正 Borel 测度， E 是 X 中 Borel 集， $\mu(E) < +\infty$ ， f 是 X 上 Borel 函数. 则 $\forall\varepsilon > 0$ ，存在紧集 $K \subset E$ 及 X 上连续函数 g 满足：

(1) $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$,

(2) $f(x) = g(x)$ ， $\forall x \in K$.

(3) $\sup\limits_{x\in X} |g(x)| \le \sup\limits_{x\in K} |f(x)|$.

如果 X 是紧 Hausdorff 空间， μ 是 X 上正则正 Borel 测度，由此定理可得， $C(X)$ 在 $L^p(X,\mu)$ $(1 \le p < \infty)$ 中稠密. 这里 $C(X)$ 表示 X 上全体连续函数集合，而 $L^p(X,\mu)$ 表示 X 上满足如下条件的全体可测函数之集合，

$\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < +\infty$.

需要注意的是 $L^p(X,\mu)$ 中每个元素 f 不只是一个函数，而是代表了与 f μ- 几乎处处相等的函数的等价类.

定理 3.1 和定理 3.2 的证明涉及更多集合论知识，本书省略不证. 有兴趣的读者可参见 W. Rudin[5] .

与 n 维欧氏空间不同，一般紧 Hausdorff 空间上正 Borel 测度未必是正则的，反例可见 W. Rudin[5] .

定理 II.3.3 设 μ 是 X 上 σ- 有限的正 Borel 测度，则 μ 是正则的当且仅当对任何满足 $\mu(E) < +\infty$ 的 Borel 集和任意的正数 ε ，都存在紧集 K 及开集 G 使得 $K \subset E \subset G$ ，而且 $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

证明 *必要性* 设 E 是 Borel 集， $\mu(E) < +\infty$ ，及 $\varepsilon > 0$. 由 μ 是正则的，可知存在紧集 K 及开集 G 使得 $K \subset E \subset G$ 且

$\mu(K) > \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2}$,

$\mu(G) < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}$.

于是， $\mu(G \setminus K) = \mu(G) - \mu(K) < \varepsilon$.

充分性 对任何 Borel 集合 E , 由于 μ 是 σ- 有限的，于是存在 E 之两两不交的子集 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 而且 $\mu(E_k) < +\infty$ ， $\forall k \ge 1$. 由假设， $\forall\varepsilon > 0$ ，对每个 E_k ，存在紧子集 $K_k \subset E_k$ 及开集 $G_k \supset E_k$ 使得 $\mu(G_k \setminus K_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. 令 $G' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ ，则 $G' \supset E$ 是开集，而且

$$\begin{aligned}\mu(E) \le \mu(G') &\le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} (\mu(K_k) + \tfrac{\varepsilon}{2^k}) \\ &= \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(K_k) = \varepsilon + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(K_k) \\ &= \varepsilon + \lim_{N\to\infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{N} K_k)\end{aligned}$$

注意到 $\bigcup_{k+1}^{N} K_k \subset E$ 是紧的，因而 $\mu(\bigcup_{k=1}^{N} K_k) \le \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K\text{是紧的}\}$．于是有

$$\begin{aligned}\sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K\text{是紧的}\} &\le \mu(E) \le \inf\{\mu(G) : G \supset E,\ G\text{是开集}\} \\ &\le \mu(G') \le \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K\text{是紧的}\} + \varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\{\mu(G) : G \supset E, G\text{是开集}\} \\ &= \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K\text{是紧的}\}\end{aligned}.$$

故 μ 是正则的. ◇

在一般的 Hausdorff 空间可以定义实的或复的 Borel 测度.

定义 II.3.3 设 μ 是 X 上 Borel 代数 $\mathcal{B}$ 上实可数可加函数，且 $+\infty$ ， $-\infty$ 只许取其中之一，而且对任意紧集 K ，有 $|\mu(K)| < +\infty$ ，则称 μ 是 X 上 实 Borel 测度 .

设 μ 是 $\mathcal{B}$ 上只取有限复值的可数可加函数，则称 μ 是 X 上 复 Borel 测度 .

设 μ 是复 Borel 测度 (包括只取有限值的实 Borel 测度)，对每个 $E \in \mathcal{B}$ ，定义

$$|\mu|(E) = \sup\{\sum_{k=1}^{\infty} |\mu(E_k)| : \{E_k\}_{k=1}^{\infty}\text{是}E\text{之可测分划}\}.$$

由测度的可数可加性可知， $\sum_{k=1}^{\infty} |\mu(E_k)|$ 总是收敛的，因而定义是有意义的．仿照定理 II.1.9 之证明，可证 $|\mu|$ 是 X 上正 Borel 测度，称之为 μ 的 全变差测度． $|\mu|(X)$ 称为 μ 的 全变差，记为 $\|\mu\|$.

每个 Borel 实测度 μ 都可表成两个正测度之差

$$\mu = \mu^+ - \mu^-,$$

这里， μ^+ 和 μ^- 分别是 μ 的正部和负部．那么 μ^+ 和 μ^- 都是正 Borel 测度．如果 μ^+ 和 μ^- 都是正则的，则称 μ 为 正则的 .

设 μ 是一个复 Borel 测度．那么它的实部与虚部都是实 Borel 测度．如果它的实部与虚部都是正则的，则称 μ 是 正则的 .

定理 II.3.4 设 X 是紧 Hausdorff 空间， μ 是 X 上正则的复 (实)Borel 测度，则 $|\mu|$ 是正则的正 Borel 测度.

证明 首先证明，若 μ_1 和 μ_2 都是正则的正测度，则 $\mu_1 + \mu_2$ 也是正则的.

事实上，对任何 Borel 集 E ， $a < (\mu_1 + \mu_2)(E)$ ，取 $a_j < \mu_j(E)$ 使得 $a_1 + a_2 = a$ ．由 μ_j 的正则性，存在紧集 $K_j \subset E$ 满足 $a_j < \mu_j(K_j)$ ， $j = 1, 2$ ．令 $K = K_1 \cup K_2$ ．那么 $K \subset E$ 是紧子集，而且 $a = a_1 + a_2 < \mu_1(K_1) + \mu_2(K_2) \le \mu_1(K) + \mu_2(K) = (\mu_1 + \mu_2)(K)$ ．由 a 之任意性， $\mu_1 + \mu_2$ 是内正则的．对任意 $b > (\mu_1 + \mu_2)(E)$ ，取 $b_j > \mu_j(E)$ 使得 $b_1 + b_2 = b$ ．由 μ_j 的正则性，可取开集 $G_j \supset E$ 满足 $\mu_j(G_j) \le b_j$ ．令 $G = G_1 \cap G_2$ ．那么 $G \supset E$ 是开集，而且 $(\mu_1 + \mu_2)(G) = \mu_1(G) + \mu_2(G) \le \mu_1(G_1) + \mu_2(G_2) \le b_1 + b_2 = b$ ．由 b 之任意性， $\mu_1 + \mu_2$ 是外正则的．总之， $\mu_1 + \mu_2$ 是正则的.

设 μ 上实 Borel 测度， μ^+ 和 μ^- 是它的正部和负部. 如果 μ 是正则的，则 μ^+ 和 μ^- 都是正则的. 因此， $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ 是正则的.

设 μ 是正则的复 Borel 测度， μ_1 和 μ_2 分别是 μ 的实部和虚部. 那么 μ_1 和 μ_2 都是正则的. 因此 $|\mu_1|$ 和 $|\mu_2|$ 都是正则的. 对每个 Borel 集 E ，由 μ 是复测度， $|\mu_j|(E) < +\infty$. 因此， $\forall \varepsilon > 0$ ，存在紧集 $K \subset E$ 及开集 $G \supset E$ 满足 $(|\mu_1| + |\mu_2|)(G \setminus K) < \varepsilon$. 因此 $|\mu|(G \setminus K) \le (|\mu_1| + |\mu_2|)(G \setminus K) < \varepsilon$. 由 ε 的任意性， $|\mu|$ 是正则的. $\diamond$

定理 II.3.5 设 X 是紧 Hausdorff 空间，那么 X 上正则的复 Borel 测度全体 $\mathcal{M}(X)$ 按 "全变差范数" 是线性赋范空间.

证明 为证明此定理，我们需要证明两件事：

(一) $\mathcal{M}(X)$ 是线性空间.

(二) $\|\mu\| \triangleq |\mu|(X)$ 是范数.

下面我们分别证明之.

(一) $\mathcal{M}(X)$ 是线性空间. 注意，测度的加法和数乘定义如下：

$$(\mu_1 + \mu_2)(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E) ,$$

$$(\alpha\mu)(E) = \alpha\mu(E) ,$$

$\forall E \in \mathcal{B}$ ， $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(X)$ 及 $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. 显然， $\alpha\mu$ 是正则的. 因此，我们只须证明 $\mu_1 + \mu_2$ 是正则的. 我们分两步完成.

第一步 设 μ_1 和 μ_2 都是实的其 Jordan 分解为 $\mu_1 = \mu_1^+ - \mu_1^-$ ， $\mu_2 = \mu_2^+ - \mu_2^-$. 那么 μ_j^+ ， μ_j^- ， $j = 1, 2$, 都是正则的. 于是 $\mu_1^+ + \mu_2^+$ 和 $\mu_1^- + \mu_2^-$ 都是正则的. 对每个 Borel 集 E , $\forall \varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset E$ 和开集 $G \supset E$ 满足 $(\mu_1^+ + \mu_2^+)(G \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$ 和 $(\mu_1^- + \mu_2^-)(G \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是 $|\mu_1 + \mu_2|(G \setminus K) \le (\mu_1^+ + \mu_2^+)(G \setminus K) + (\mu_1^- + \mu_2^-)(G \setminus K) < \varepsilon$. 记 $\mu = \mu_1 + \mu_2$ ， $\mu = \mu^+ - \mu^-$ 是它的极分解. 那么 $\mu^+(G \setminus K) \le |\mu|(G \setminus K) < \varepsilon$ ， $\mu^-(G \setminus K) \le |\mu|(G \setminus K) < \varepsilon$. 所以 μ^+ 和 μ^- 都是正则的. 故 $\mu_1 + \mu_2$ 是正则的.

第二步 设 μ_1 和 μ_2 都是复的，令 $\mu_1 = \mu_{1R} + i\mu_{1I}$ ， $\mu_2 = \mu_{2R} + i\mu_{2I}$ ，其中 μ_{jR} 和 μ_{jI} 分别是 μ_j 的实部和虚部， $j = 1, 2$. 那么 $\mu_{1R} + \mu_{2R}$ 和 $\mu_{1I} + \mu_{2I}$ 分别是 $\mu_1 + \mu_2$ 的实部与虚部. 由前段知，它们是正则的. 故 $\mu_1 + \mu_2$ 是正则的.

(二) $\|\mu\| \triangleq |\mu|(X)$ 是范数.

(i) 显然， $\|\mu\| \ge 0$ ，而且 $\|\mu\| = 0$ 当且仅当 $\mu = 0$.

(ii) $\forall \mu \in \mathcal{M}(X)$ ， $\alpha \in \mathbb{C}$ ，

$$\begin{aligned}
\|\alpha\mu\| &= |\alpha\mu|(X) = \sup\{\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha\mu(E_j)| : \{E_j\}_{j=1}^{\infty}\text{是}X\text{之可测分划}\} \\
&= \sup\{\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha||\mu(E_j)| : \{E_j\}_{j=1}^{\infty}\text{是}X\text{之可测分划}\} \\
&= |\alpha| \sup\{\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)| : \{E_j\}_{j=1}^{\infty}\text{是}X\text{之可测分划}\} \\
&= |\alpha||\mu|(X) = |\alpha|\|\mu\|.
\end{aligned}$$

(iii) 设 $\mu_1, \ \mu_2 \in \mathcal{M}(X)$.

$$\begin{aligned}
&\|\mu_1+\mu_2\| = |\mu_1+\mu_2|(X)\\
=\ & \sup\{\sum_{j=1}^{\infty}|(\mu_1+\mu_2)(E_j)| : \{E_j\}_{j=1}^{\infty}\text{是}X\text{之可测分划}\}\\
\le\ & \sup\{\sum_{j=1}^{\infty}(|\mu_1(E_j)|+|\mu_2(E_j)|) : \{E_j\}_{j=1}^{\infty}\text{是}X\text{之可测分划}\}\\
\le\ & \sup\{\sum_{j=1}^{\infty}(|\mu_1|(E_j)+|\mu_2|(E_j)) : \{E_j\}_{j=1}^{\infty}\text{是}X\text{之可测分划}\}\\
=\ & \sup\{\sum_{j=1}^{\infty}|\mu_1|(E_j)+\sum_{j=1}^{\infty}|\mu_2|(E_j) :, \{E_j\}_{j=1}^{\infty}\text{是}X\text{之可测分划}\}\\
=\ & |\mu_1|(X)+|\mu_2|(X)\\
=\ & \|\mu_1\|+\|\mu_2\|.
\end{aligned}$$

可见 $\|\mu\|$ 确实是 $\mathcal{M}(X)$ 上的范数. ◇

为了证明 $\mathcal{M}(X)$ 完备，我们需要一些准备．设 Y 是线性赋范空间，序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset Y$ 称为可和的，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 在 Y 中收敛，即 $\{\sum\limits_{n=1}^{N}x_n\}_{N=1}^{\infty}$ 是 Y 中的收敛序列；序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset Y$ 称为绝对可和的，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<+\infty$ ．

命题 II.3.6 线性赋范空间 Y 是完备的当且仅当 Y 中绝对可和序列都是可和的.

证明 必要性, 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset Y$ 是绝对可和的, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<+\infty$. 对任何 $k,\ m,\ k>m$,

$$\|\textstyle\sum_{n=1}^{k}x_n-\sum_{n=1}^{m}x_n\| = \|\sum_{n=m+1}^{k}x_n\|\le\sum_{n=m+1}^{k}\|x_n\|.$$

可见 $\{\sum\limits_{n=1}^{k}x_n\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列，而 Y 是完备的，故 $\{\sum\limits_{n=1}^{k}x_n\}$ 收敛.

充分性设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 中任何 Cauchy 序列, 往证它收敛. 为此只须证它有收敛子序列. 由假设，对每个 $i\in\mathbb{N}$ ，存在 n_i ，使当 $m>n_i$ ，

$$\|x_m-x_{n_i}\|<1/2^i, i=1,2,\cdots.$$

不失一般性可设 $n_1<n_2<\cdots$ ．于是

$$\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\|x_{n_{i+1}}-x_{n_i}\|\le\sum_{i=1}^{\infty}1/2^i<+\infty\ .$$

即 $\{x_{n_{i+1}}-x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 是绝对可和的，从而是可和的．故 $\sum\limits_{i=1}^{N}(x_{n_{i+1}}-x_{n_i})=x_{n_{N+1}}-x_{n_1}$ 是收敛的，亦即 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{x_{n_N}\}_{N=1}^{\infty}$ 收敛. ◇

定理 II.3.7 $\mathcal{M}(X)$ 是 Banach 空间.

证明 只须证明完备性．设 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}(X)$ 是绝对可和的，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|\mu_n\|<+\infty$ ．于是对任意 $E\in\mathcal{B}$ ， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\mu_n(E)|\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|\mu_n\|<+\infty$ ．定义

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(E)\ .$$

那么 μ 是 Borel 代数 $\mathcal{B}$ 是取值为复数的函数．为证 $\mu\in\mathcal{M}(X)$ ，只须证 μ 是可数可加的.

设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathcal{B}$ 是两两不交的， $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ ．由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_n(E_k)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_n|(E_k)=\sum_{n=1}^{\infty}|\mu_n|(E)\le\sum_{n=1}^{\infty}\|\mu_n\|<+\infty\ ,$$

所以

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)\ .$$

下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\mu-\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k\|=0$.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|\mu_n\|<+\infty$ ，对任意正数 ε ，存在 N 使得当 $n\geq N$ 时， $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\|\mu_k\|<\varepsilon$. 此时,

$$
\begin{aligned}
\|\mu-\sum_{k=1}^{n}\mu_k\| &= |\mu-\sum_{k=1}^{n}\mu_k|(X)\\
&= \sup\{\sum_{j=1}^{\infty}|(\mu-\sum_{k=1}^{n}\mu_k)(E_j)| : \{E_j\}_{j=1}^{\infty}\text{是}X\text{之可测分划}\}\\
&= \sup\{\sum_{j=1}^{\infty}|\sum_{k=n+1}^{\infty}\mu_k(E_j)| : \{E_j\}_{j=1}^{\infty}\text{是}X\text{之可测分划}\}\\
&\leq \sup\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}|\mu_k|(E_j) : \{E_j\}_{j=1}^{\infty}\text{是}X\text{之可测分划}\}\\
&= \sup\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\mu_k|(E_j) : \{E_j\}_{j=1}^{\infty}\text{是}X\text{之可测分划}\}\\
&= \sup\{\sum_{k=n+1}^{\infty}|\mu_k|(X) : \{E_j\}_{j=1}^{\infty}\text{是}X\text{之可测分划}\}\\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty}\|\mu_k\|<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 收敛于 μ . 根据命题 II.3.6， $\mathcal{M}(X)$ 是完备的. $\diamond$

练习题

1 设 X 是一个非空集合， $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是 X 的有限个非空子集. 写出由 $\{X_j\}_{j=1}^n$ 生成的 σ 代数.

2 设 X 是一个非空集合， f 是 X 上的一个实值函数，且 $\{f(x): x \in X\}$ 是有限集. 写出使 f 可测的最小的 σ 代数.

3 设 X 是一个非空集合， f 是 X 上的一个实值函数. 写出使 f 可测的最小的 σ 代数.

4 设 X 是一个非空集合， f_1, f_2 是 X 上的两个实值函数. 写出使 f_1 和 f_2 都可测的最小的 σ 代数.

5 用 Lebesgue 基本定理证明：对任意非负实数 $\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ 有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$.

6 设 $(X, \mathcal{F})$ 是一个可测空间， μ 是其上一个有限正测度. 对 $1 \le p < \infty$ ，记

$$L^p(\mu) = \{f: f\text{是}X\text{上几乎处处有定义的可测的复值函数，且}|f|^p\text{可积}\}.$$

对 $f, g \in L^2(\mu)$ ，如果 $f(x) = g(x)$ ， $[\mu]-$a. e. ，则记为 $f = g$. 定义

$$\|f\|_p = (\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu)^{1/p}, \quad \forall f \in L^p(\mu).$$

证明： $L^p(\mu)$ 是一个 Banach 空间.

特别的， $L^2(\mu)$ 是一个 Hilbert 空间.

7 利用 Levi 定理和 Riesz 表示定理证明下面两个定理.

定理 A(Radon-Nikodym) 设 μ 和 ν 是可测空间 $(X, \mathcal{F})$ 上两个有限正测度， $\nu \ll \mu$. 证明：存在 X 上 $\mu-$ 可积的非负函数 f 使得 $\nu(E) = \int_E f\mathrm{d}\mu$ ， $\forall E \in \mathcal{F}$.

定理 B(Lebesgue) 设 μ 和 ν 是可测空间 $(X, \mathcal{F})$ 上两个有限正测度. 证明：存在唯一一对有限正测度 ν_{ac} 和 ν_s 满足： $\nu_{ac} \ll \mu$ ， $\nu_s \perp \mu$ 且 $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$.

提示：对 $L^2(\mu+\nu)$ 上有界线性泛函 $\varphi(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu$ ， $\forall f \in L^2(\mu+\nu)$ ，用 Riesz 表示定理.

8 设 μ 和 ν 是可测空间 $(X, \mathcal{F})$ 上两个有限正测度. 证明： $\nu \ll \mu$ 当且仅当对 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta > 0$ 使得，对任意 $E \in \mathcal{F}$ ，如果 $\mu(E) < \delta$ ，则 $\nu(E) < \varepsilon$.

9 设 m 为实数轴 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 测度，$f \in L^1(m)$. 对每个 Borel 集 E 定义 $\mu(E) = \int_E f\mathrm{d}m$. 证明： μ 是 $\mathbb{R}$ 上一个有限 Borel 测度，而且 $|\mu|(E) = \int_E |f|\mathrm{d}m$ ， $\forall E$.

10 设 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{F})$ 上有限实测度，$\mu = \mu_+ - \mu_-$ 是它的 Jordan 分解. 证明：$\mu_+ \perp \mu_-$.

11 设 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{F})$ 上有限正测度. 对 $E, F \in \mathcal{F}$, 如果 $\mu(E \triangle F) = 0$, 则记为 $E = F$, 这里 $E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$. 证明：

(1) 对 $E, F \in \mathcal{F}$ ，定义 $\rho(E, F) = \mu(E \triangle F)$. 那么 ρ 是 $\mathcal{F}$ 上一个距离.

(2) $L^2(\mu)$ 是可分的当且仅当距离空间 $(\mathcal{F}, \rho)$ 是可分的.

12 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上正 Borel 测度，且存在紧集 X 使得 $\mu(X) = \mu(\mathbb{R}^n) = 1$. 证明：存在紧集 K 满足：

(1) $\mu(K) = 1$.

(2) 对任意 K 的紧的真子集 $\widetilde{K}$ ， $\mu(\widetilde{K}) < 1$.

13 举例说明存在有界闭区间 $[0,1]$ 上正 Borel 测度 μ 满足：

(1) $\mathrm{supp}\mu = [0,1]$.

(2) μ 关于 Lebesgue 测度 m 是绝对连续的.

(3) m 不关于 μ 绝对连续.

14 举例说明存在 $[0,2]$ 上连续奇异正 Borel 测度 μ 使得 $\text{supp}\mu=[0,2]$.

15 举例说明存在 $[0,1]$ 上连续的正 Borel 测度 μ_1 和 μ_2 满足：

(1) $\text{supp}\mu_1=\text{supp}\mu_2=[0,1]$.

(2) $\mu_1\perp\mu_2$.

(3) $\mu_1+\mu_2=\mu$ ，这里 μ 是 $[0,1]$ 上 Lebesgue 测度.

16 证明 $\mathbb{R}^n$ 上每个有限的正 Borel 测度都是正则的.

提示：令 $\mathcal{G}=\{E:\inf\{\mu(V):V\text{是开集，且}E\subset V\}=\sup\{\mu(K):K\text{是紧集，且}K\subset E\}\}$. 证明 $\mathcal{G}$ 是包含全体开集的一个 σ 代数.

17 证明下面定理：

Egoroff 定理：设 μ 是紧 Hausdoff 空间 X 上正则的正 Borel 测度，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 上一列几乎处处收敛于 f 的 Borel 函数. 证明：$\forall\varepsilon>0$ ，存在闭子集 F 满足：$\mu(X\setminus F)<\varepsilon$ 且 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 F 上一致收敛于 f .

Lusin 定理：设 X 是紧 Hausdoff 空间，其每个开子集都是 σ- 紧的. 令 μ 为 X 上一个正 Borel 测度. 如果 f 是 X 上可测的实值函数，则对任意 $\varepsilon>0$ ，存在闭子集 F 满足：$f|_F$ 连续，且 $\mu(X\setminus F)<\varepsilon$.

第三章　几个基本结果

III.1　商空间及对偶定理

设 S 是一个非空集合， R 表示 S 中元素之间的某种关系，若 $x,\ y\in S$ 具有这种关系，记为 xRy ．例如全体实数 $\mathbb{R}$ 是集合，“=” 表示两个实数之间的关系，“ $\geq$ ” 也表示一种关系．再如平面上全体直线是一个集合，“ $\parallel$ ”(平行) 也是一种关系，“ $\perp$ ”(垂直) 也是一种关系，“相交 ” 也是一种关系．在各种关系中，我们感兴趣的是所谓的等价关系．

定义　III.1.1　集合 S 上的关系 R 称为 等价 关系，如果

(a)　$\forall x\in S,\ xRx$ ，　　(反身性)

(b)　若 xRy ，则 yRx ，　　(对称性)

(c)　若 $xRy,\ yRz$ ，则 xRz ．　　(传递性)

比如， $\mathbb{R}$ 上的 “=” 是等价关系，但 “$\geq$” 不是等价关系，平面直线间的 “$\parallel$” 是等价关系，但 “$\perp$” 不是等价关系．

设 R 是集合 S 上的一个等价关系， $\forall x\in S$ ，令

$$[x]=\{y\in S; yRx\}\ ,$$

称为 x 的 等价类，或 陪集．

例如，在平面上全体直线集合中，令 $l_0: y=0$ 表示实轴，则其在平行关系下等价类为 $[l_0]=\{l:y=C(\text{常数});\,C\in\mathbb{R}\}$ ．

设 X 是线性空间， M 是 X 的子空间．定义 X 上关系 R 为： xRy 表示 $x-y\in M$ ．容易验证 R 是一个等价关系．给定 $x\in X$ ，其陪集为

$$[x]=x+M\stackrel{\triangle}{=}\{x+y:\ y\in M\}\ .$$

现在我们考虑 X 中所有元的陪集做成集合，记为 X/M ．在其中可以定义运算

$$[x]+[y]=[x+y]\ ,$$
$$\alpha[x]=[\alpha x]\ ,$$

$\forall x,\ y\in S,\ \alpha\in\mathbb{C}$ ．容易验证，按这样定义线性运算， X/M 也是线性空间，称为 X 关于 M 之 商空间． X/M 中零元就是 $0\in X$ 所在的等价类 $[0]$ ，即 M. 从 X 到商空间 X/M 有一个自然映射 $\pi:\ X\to X/M$ ，

$$\pi(x)=[x]\ ,$$

$\forall x\in X$ ．显然 π 是线性映射，通常称 π 为自然同态.

如果 X 是线性赋范空间， M 是 X 之闭子空间，如上产生的商空间 X/M ，也可以赋以范数，使之成为线性赋范空间，定义

$$\|[x]\|=\inf\{\|y\|:\ y\in[x]\}\ .$$

由等价类定义实际上也有

$$\|[x]\|=\inf\{\|x-m\|:\ m\in M\}\stackrel{\triangle}{=}\mathrm{dist}\{x,M\}\ .$$

往证 $\|[x]\|$ 确实是 X/M 上的范数.

(i) $\|[x]\|\geq 0$ ，且 $\|[x]\|=0$ 当且仅当 $[x]=0$.

只须证 $\|[x]\|=0\Rightarrow[x]=0$ ，即 $x\in M$ ．由定义存在 $y_n\in M$ 使 $\|x-y_n\|\to 0$ ．而 M 是

闭的，故 $x \in M$.

(ii) $\|\alpha[x]\| = |\alpha|\|[x]\|$ ，对任意 $\alpha \in \mathbb{C}$.

事实上，对任何 $\alpha \neq 0$ ，

$$\begin{aligned}\|\alpha[x]\| &= \|[\alpha x]\| = \inf\{\|y\|; y \in [\alpha x]\} = \inf\{\|\alpha z\|; z \in [x]\} \\ &= \inf\{|\alpha|\|z\|; z \in [x]\} = |\alpha| \inf\{\|z\|; z \in [x]\} = |\alpha|\|[x]\|.\end{aligned}$$

(iii) $\|[x] + [y]\| \leq \|[x]\| + \|[y]\|$.

由 $\|[\cdot]\|$ 定义， $\forall \varepsilon > 0$ ，存在 $x_1 \in [x],\ y_1 \in [y]$ ，使

$$\|x_1\| < \|[x]\| + \varepsilon/2\ ,$$

$$\|y_1\| < \|[y]\| + \varepsilon/2\ .$$

从而

$$\|x_1 + y_1\| \leq \|x_1\| + \|y_1\| < \|[x]\| + \|[y]\| + \varepsilon\ .$$

由于 $x_1 - x \in M, y_1 - y \in M$ ，所以 $(x_1 + y_1) - (x + y) \in M$. 故 $x_1 + y_1 \in [x + y]$ ，从而

$$\|[x] + [y]\| = \|[x + y]\| \leq \|x_1 + y_1\| < |[x]\| + \|[y]\| - \varepsilon\ .$$

而 ε 是任意的，所以

$$\|[x] + [y]\| \leq \|[x]\| + \|[y]\|\ .$$

总之， $\|[\cdot]\|$ 确实是 X/M 上的范数，通常称之为 <u>商范数</u> .

这里需要注意的是 M 必须是闭的. 否则，不能由 $\|[x]\| = 0$ 得出 $[x] = 0$ ，即 $x \in M$.

若 X 是线性赋范空间， $\pi : X \to X/M$ 是线性压缩映射，即

$$\|\pi(x)\| = \|[x]\| \leq \|x\|\ ,$$

$\forall x \in X$. 因而 $\pi : X \to X/M$ 一定是连续的.

定理 III.1.1 设 X 是 Banach 空间， M 是 X 闭子空间，则 X/M 亦是 Banach 空间.

证明 只须证明 X/M 是完备的. 由命题 II.3.6 ，又只须证明 X/M 中任何绝对可和序列都是可和的.

设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X/M$ 使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$. 由 X/M 中范数定义，可取 x_n ，使 $f_n = [x_n]$ ，且 $\|x_n\| \leq 2\|f_n\|$. 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$. 而 X 是 Banach 空间，由命题 II.3.6 ， $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛. 设 $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ ，则

$$\|\textstyle\sum_{n=1}^{N} f_n - [y]\| = \|[\sum\limits_{n=1}^{N} x_n - y]\| \leq \|\sum\limits_{n=1}^{N} x_n - y\| \to 0, 当N \to \infty.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = [y]$. ◇

以下总假定 X 是 Banach 空间， X^* 表示 X 的对偶空间. 若 E 是 X 之子空间，令

$$E^{\perp} = \{x^* \in X^*; x^*(x) = 0, \forall x \in E\}\ ,$$

称为 E 在 X^* 中的 <u>零化子</u> . 容易证明 $E^{\perp}$ 总是 X^* 中的闭子空间. 关于它有如下简单事实成立：

1° $\overline{E}^{\perp} = E^{\perp}$ ，

这里 $\overline{E}$ 表示 E 之闭包.

2° $E^{\perp} = \{0\}$ 当且仅当 E 在 X 中稠密，即 $\overline{E} = X$.

若 F 是 X^* 之子空间，令

$${}^{\perp}F = \{x \in X; x^*(x) = 0\ ,\quad \forall x^* \in F\}\ ,$$
称为 F 在 X 中零化子，易见 ${}^{\perp}F$ 是 X 中闭子空间．关于它亦有

1* ${}^{\perp}\overline{F} = {}^{\perp}F$.

2* 当 X 自反时， ${}^{\perp}F = \{0\}$ 当且仅当 F 在 X^* 中稠密．

注意这里 2* 当 X 不自反时，必要性不真．例如取 $X = L^1[0,1]$ ，则 $X^* = L^\infty[0,1]$ ．令 $F = C[0,1]$ ．这时 ${}^{\perp}F = \{0\}$ ，但 $F = C[0,1]$ 不在 $L^\infty[0,1]$ 中稠密．为什么会有这种事情发生？主要是 X^* 中弱 * 拓扑闭包与范数闭包不同．

给定一个 Banach 空间 X ，及闭子空间 M ，得到商空间 X/M ．它们的对偶空间应有一种关系．下面的对偶定理清楚地描述了这种关系．

定理 III.1.2 设 X 是 Banach 空间， M 是 X 之闭子空间，则

(i) M^* 与 $X^*/M^{\perp}$ 等距同构.

(ii) $M^{\perp}$ 与 $(X/M)^*$ 等距同构.

所谓两个 Banach 空间 X, Y 等距同构，即存在 X 到 Y 的连续线性映射 τ ，它既是单射的也是满射的，而且是等距映射，即 $\|\tau(x)\| = \|x\|$ ， $\forall x \in X$.

证明 (i) 设 $f \in M^*$ ，则 f 是 M 上连续线性泛函．由 Hahn-Banach 扩张定理，存在 $F \in X^*$ ，使 $F(x) = f(x)$ ， $\forall x \in M$ ，且 $\|F\| = \|f\|$ ．假设 $F' \in X^*$ 是 f 的另一个扩张，即 $F'(x) = f(x)$ ， $\forall x \in M$ ．则
$$(F - F')(x) = F(x) - F'(x) = 0\ ,\quad \forall x \in M\ .$$
即 $F - F' \in M^{\perp}$ ，从而 $F' \in [F] \in X^*/M^{\perp}$ ．这说明每个 $f \in M^*$ 唯一确定一个元 $[F] \in X^*/M^{\perp}$ ，其中 F 是 f 之扩张．定义 $\tau : M^* \to X^*/M^{\perp}$ 如下：
$$\tau(f) = [F]\ ,$$
$\forall f \in M^*$ ，这里 F 是 f 的扩张．显然 τ 是线性的．如果 $\tau(f) = [F] = 0$ ，即零泛函亦是 f 的扩张，则 $f = 0$ ．所以 τ 是单射．往证 τ 是满射的．设 $[F] \in X^*/M^{\perp}$ ，任取 $F' \in [F]$ ，令 $f = F'|M$ ．则 $f \in M^*$ ．而 F' 是 f 的扩张，于是 $\tau(f) = [F'] = [F]$ ．可见 τ 是满射的．

下面证 τ 是等距的．设 $f \in M^*$ ，则 $\forall F' \in [F] = \tau(f)$ 是 f 的扩张，故
$$\|\tau(f)\| = \|[F]\| = \inf\{\|F'\| : F' \in [F]\} \geq \|f\|\ .$$
设 F_1 是 f 之保范扩张，则
$$\|\tau(f)\| = \|[F_1]\| \leq \|F_1\| = \|f\|\ .$$
总之， $\|\tau(f)\| = \|f\|$ ．因而 $\tau : M^* \to X^*/M^{\perp}$ 是等距同构.

(ii) 设 $f \in M^{\perp}$ ．定义
$$\widetilde{f}([x]) = f(x')\ ,\quad \forall x' \in [x] \in X/M\ . \tag{1.1}$$
若又有 $x'' \in [x]$ ，则 $x'' - x' \in M$ ．于是 $f(x'' - x') = 0$ ，即 $f(x'') = f(x')$ ．这说明 $\widetilde{f}$ 之定义是完善的．易见 $\widetilde{f}$ 是 X/M 上线性泛函，而且
$$|\widetilde{f}([x])| = |f(x')| \leq \|f\|\|x'\|\ ,\quad \forall x' \in [x]\ .$$
故
$$|\widetilde{f}([x])| \leq \|f\| \inf\{\|x'\| : x' \in [x]\} = \|f\|\|[x]\|\ .$$
这说明 $\widetilde{f} \in (X/M)^*$ ，而且 $\|\widetilde{f}\| \leq \|f\|$.

定义映射 $J : M^{\perp} \to (X/M)^*$ 为

$$J(f) = \widetilde{f}\ ,$$

$\forall f \in M^{\perp}$. 这里 $\widetilde{f}$ 由 (1.1) 确定. 易见 J 是线性的单射, 往证 J 是满射. 对 $F \in (X/M)^*$, 定义

$$f(x) = F([x])\ ,$$

$\forall x \in X$. 易见 f 是线性的, 而且

$$|f(x)| = |F([x])| \le \|F\|\|[x]\| \le \|F\|\|x\|\ .$$

可见 f 是连续的, 且 $\|f\| \le \|F\|$. 当 $x \in M$ 时, $[x] = 0$, 故

$$f(x) = F([x]) = 0\ .$$

于是 $f \in M^{\perp}$. 又由 $\widetilde{f}$ 的定义可见, $\widetilde{f} = F$, 即

$$J(f) = F\ .$$

于是 J 是满射的. 又由前述可见

$$\|\widetilde{f}\| \le \|f\| \le \|F\| = \|\widetilde{f}\|\ .$$

故 $\|J(f)\| = \|f\|$, 即 J 是等距. ◇

III.2 Stone-Weierstrass 定理

在数学分析中大家就知道 Weierstrass 逼近定理, 闭区间 $[a, b]$ 上的一个连续函数可被一个多项式序列一致逼近, 而且它可以很容易推广到 $\mathbb{R}^n$ 中紧子集 S 上任何连续函数. 到 1937 年, Stone 把这个结果推广到一般紧的 Hausdorff 空间 X 上的连续函数. 后人把这个结果称为 Stone-Weierstrass 定理. 这是一个非常重要的基本定理. 尤其在今天, 计算机的广泛应用, 由多项式来逼近一个连续函数更有实际意义. 这节就介绍这个重要结果.

定理 III.2.1 (Urysohn 引理) 设 X 是紧 Hausdorff 空间, A, B 是 X 中不相交闭集, 则必有 X 上实值连续函数 f , 使 $0 \le f \le 1$ 且

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in A, \\ 0, & \text{当 } x \in B. \end{cases}$$

证明可参见 W.Rudin[1] 第 39 页.

这里我们对紧度量空间情形给出一个简单构造. 设 ρ 是 X 上度量, 因 A, B 是不相交闭集, 故 $\rho(A, B) > 0$. 令

$$\varphi(x) = \tfrac{\rho(x,B)}{\rho(A,B)},\ \forall x \in X.$$

其中

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}\ .$$

则 φ 是 X 上连续函数, 且 $\varphi \ge 0$. 此外,

$$\varphi(x) \begin{cases} \ge 1, & \text{当 } x \in A\ , \\ = 0, & \text{当 } x \in B. \end{cases}$$

令

$$f(x) = \min\{\varphi(x), 1\}\ ,$$

$\forall x \in X$. 则 f 即为所求.

Urysohn 引理有一个重要推论.

推论 III.2.2 设 X 是紧 Hausdorff 空间, K 是 X 的紧子集, $G_1, \cdots, G_n$ 是 X 的开集,

$K\subset\bigcup_{j=1}^{n}G_j$ ．则存在 X 上连续函数 h_j ， $1\le j\le n$ ，满足 $0\le h_j\le\chi_{G_j}$ ，且

$$\sum_{j=1}^{n}h_j(x)=1,$$

$\forall x\in K$ ．其中 χ_{G_j} 表示 G_j 之特征函数， $j=1,\cdots,n$ ．

证明 对任何 $x\in K$ ，必有某个 j ， $1\le j\le n$ ，使 $x\in G_j$ ．由定理 I.4.8 存在 x 之开邻域 V_x ，具有紧闭包 $\overline{V}_x$ ，使

$$x\in V_x\subset\overline{V}_x\subset G_j.$$

当 x 取遍 K ，所有如此的 V_x 形成 K 的一个开覆盖．由于 K 是紧的，存在有限子覆盖 $V_{x_1},\cdots,V_{x_m}$ ．对每个 $j,1\le j\le n$ ，设 K_j 是所有位于 G_j 之内的 $\overline{V}_{x_i}$ 之并．则 $K_j\subset G_j,j=1,\cdots,n$ ．且 $K\subset\bigcup_{j=1}^{n}K_j$ ．根据 Urysohn 引理，存在 X 上连续函数 f_j ， $0\le f_j\le 1$ ，且

$$f_j=\begin{cases}1,x\in K_j\\0,x\notin G_j\end{cases},j=1,\cdots,n.$$

定义

$$\begin{aligned}&h_1=f_1,\\&h_2=(1-f_1)f_2,\\&\cdots\ \cdots\ \cdots\\&h_n=(1-f_1)\cdots(1-f_{n-1})f_n.\end{aligned}$$

则 h_j 是 X 上的连续函数，且 $0\le h_j\le\chi_{G_j}$ ， $j=1,\cdots,n$ ．又

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n}h_j=1-(1-f_1)(1-f_2)\cdots(1-f_n).$$

而当 $x\in K$ ，必有某个 j ，使 $x\in K_j$ ．于是 $f_j(x)=1$ ．从而

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n}h_j(x)=1\ .$$ ◇

可以证明 Urysohn 引理及其推论对局部紧的 Hausdorff 空间也成立．为了叙述方便，我们引进 Banach 代数及 C^* 代数概念．

定义 III.2.1 设 $\mathcal{A}$ 是数域 K 上的 Banach 空间，而且 $\mathcal{A}$ 上有乘法运算，即对任何 $f,\ g\in\mathcal{A}$ ，必有 $fg\in\mathcal{A}$ 与之对应，且满足如下算律：

(1) $(fg)h=f(gh)$ ， (乘法结合律)

(2) $(f+g)h=fh+gh,\ f(g+h)=fg+fh$ ， (乘法对加法分配律)

(3) $(\alpha f)g=f(\alpha g)=\alpha(fg)$ ，

(4) $\|fg\|\le\|f\|\|g\|$ ，

对任何 $f,g,h\in\mathcal{A},\ \alpha\in K$ ．称 A 是一个 Banach 代数．

若存在元 $e\in\mathcal{A}$ 使

(5) $ef=fe=f,\ \forall f\in\mathcal{A}$ ，

称 e 是 $\mathcal{A}$ 之 单位元． $\mathcal{A}$ 称为有单位元代数．若还有

(6) $fg=gf,\forall f,g\in\mathcal{A}$ ，

称 $\mathcal{A}$ 是交换的 Banach 代数．

定义 III.2.2 设 $\mathcal{A}$ 是数域 K 上的 Banach 代数， $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 之子集，若 $\forall f,g\in\mathcal{B},\alpha\in K$ ，总有 $f+g,fg,\alpha f\in\mathcal{B}$ ，称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 之 子代数．

若进一步还有， $\forall f_n\in\mathcal{B},n=1,2,\cdots,\|f_n-f\|\to 0$ ， $n\to\infty$ ，必有 $f\in\mathcal{B}$ ，称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 之闭子代数．

设 X 是 Banach 空间， $\dim X > 1$ ， $\mathcal{L}(X)$ 就是一个有单位元但非交换的 Banach 代数. 而 X 上全体紧算子 $\mathcal{C}(X)$ 就是 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ 之一个闭子代数.

定义 III.2.3 设 $\mathcal{A}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 Banach 代数. 若 $\mathcal{A}$ 中存在对合运算 $^*: f \mapsto f^*$ ，满足如下算律：

(1) $(f^*)^* = f$ ，
(2) $(f+g)^* = f^* + g^*$ ，
(3) $(\alpha f)^* = \bar{\alpha} f^*$ ，
(4) $(fg)^* = g^* f^*$ ，
(5) $\|f^* f\| = \|f\|^2$ ，

则称 $\mathcal{A}$ 是一个 C^* 代数.

设 $\mathcal{H}$ 是一个复的 Hilbert 空间，则 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 就是一个有单位元的 C^* 代数，其中对合运算就是算子的 “伴随” .

设 X 是紧的 Hausdorff 空间. 用 $C(X)$ 表示 X 上全体连续函数集合， $C_R(X)$ 表示 X 上全体实值连续函数集合. 已知按逐点定义的加法，数乘及上确界范数， $C(X), C_R(X)$ 分别是复、或实 Banach 空间. 若在 $C(X)$(或 $C_R(X)$) 中定义运算

$$(fg)(x) = f(x)g(x),\ \forall x \in X\ ,$$

对 $\forall f, g \in C(X)$(或$C_R(X)$) . 可以验证 $C(X)$ 和 $C_R(X)$ 分别是复和实 Banach 代数. 对 $f \in C(X)$ ，令

$$f^*(x) = \overline{f(x)},\ \forall x \in X\ ,$$

这里 $\overline{f(x)}$ 表示 $f(x)$ 复共轭. 易验证 $C(X)$ 按此对合运算成为 C^* 代数.

定义 III.2.4 设 X 是紧 Hausdorff 空间， S 是 $C_R(X)$ 子集，若对 $f, g \in S$ 总有

$$f \wedge g = \min\{f, g\},\ f \vee g = \max\{f, g\}$$

都在 S 中，称 S 是 $C_R(X)$ 的<u>格</u>.

引理 III.2.3 设 A 是 $C_R(X)$ 中的格， $f \in C_R(X)$ ，若对任何 $p, q \in X, \varepsilon > 0$ ，总有 $f_{pq} \in A$ 使

$$|f(p) - f_{pq}(p)| < \varepsilon,\ |f(q) - f_{pq}(q)| < \varepsilon\ ,$$

则 $f \in \overline{A}$，这里 $\overline{A}$ 表示 A 之范数闭包.

证明 取定 $\varepsilon > 0$ ，对 $p, q \in X$ ，定义集合

$$W_{pq} = \{x \in X; f_{pq}(x) < f(x) + \varepsilon\}\ ,$$
$$V_{pq} = \{x \in X; f_{pq}(x) > f(x) - \varepsilon\}\ .$$

由 f, f_{pq} 的连续性，可知 W_{pq}, V_{pq} 皆为开集. 由假设， $p, q \in W_{pq} \cap V_{pq}$. 固定 $q \in X$ ，开集族 $\{W_{pq}; p \in X\}$ 覆盖 X . 因 X 是紧的，存在有限子覆盖 $\{W_{p_k q}; k = 1, \cdots, m\}$. 注意到

$$f_{p_k q}(x) < f(x) + \varepsilon, 当 x \in W_{p_k q}\ ,$$
$$f_{p_k q}(x) > f(x) - \varepsilon, 当 x \in V_{p_k q}\ ,$$

$k = 1, \cdots, m$. 令 $f_q(x) = \min\{f_{p_1 q}(x), \cdots, f_{p_m q}(x)\}$ ， $\forall x \in X$ ， $V_q = \bigcap_{k=1}^{m} V_{p_k q}$. 则 $f_q \in A, q \in V_q$. 而

$$f_q(x) < f(x) + \varepsilon, \forall x \in X\ ,$$
$$f_q(x) > f(x) - \varepsilon, 当 x \in V_q.$$

开集族 $\{V_q, q\in X\}$ 覆盖了 X ,存在有限子覆盖 $\{V_{q_j}, j=1,\cdots,n\}$. 令 $f_\varepsilon(x)=\max\{f_{q_1}(x),\ \cdots,\ f_{q_n}(x)\}$, $\forall x\in X$, 则 $f_\varepsilon\in A$, 而且

$$f(x)-\varepsilon<f_\varepsilon(x)<f(x)+\varepsilon, \forall x\in X\ .$$

所以

$$\|f_\varepsilon-f\|<\varepsilon\ .$$

而 ε 是任意的，故 $f\in\overline{A}$. ◇

显然，如果对 $\forall p,q\in X$ ，都有 $f_{pq}\in A$ 使 $f_{pq}(p)=f(p),\ f_{pq}(q)=f(q)$ ，则 $f\in\overline{A}$.

引理 III.2.4 *$C_R(X)$ 之闭子代数 A 是一个格.*

证明 对任何 $f,g\in C_R(X)$ ，总有

$$f\vee g=\tfrac{1}{2}[(f+g)+|f-g|]\ ,$$
$$f\wedge g=\tfrac{1}{2}[(f+g)-|f-g|]\ .$$

A 是子代数，可见为证 A 是格，只需证对任何 $f\in A$ ，必有 $|f|\in A$.

设 $\|f\|=M$ ，由经典 Weierstrass 逼近定理，存在多项式 $p_n(t)$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛于连续函数 $\varphi(t)=|t|$. 即对每个 $n\in\mathbb{N}$,

$$|p_n(t)-\varphi(t)|\le\tfrac{1}{n}\ ,\quad \forall t\in[-M,M]\ .$$

由于 $\forall x\in X,\ f(x)\in[-M,M]$ ，故

$$|p_n(f(x))-|f|(x)|\le\tfrac{1}{n}\ .$$

从而 $\|p_n(f)-|f|\|\to 0,\ n\to\infty$. 不妨设 p_n 是常系数为 0 的多项式 (否则，注意 $p_n(0)\to\varphi(0)=0$ ，以 $p_n-p_n(0)$ 代替 p_n 即可) ，则 $p_n(f)\in A$ ，从而 $|f|\in\overline{A}=A$. ◇

定义 III.2.5 *$C(X)$(或$C_R(X)$) 子集 A 称为 <u>分离 X 中点</u>，如果对任意 $x_1,\ x_2\in X, x_1\ne x_2$ ，必有 $f\in A$ ，使 $f(x_1)\ne f(x_2)$.*

定理 III.2.5 (Stone-Weierstrass *定理*) *设 X 是紧 Hausdorff 空间， A 是 $C_R(X)$ 的闭子代数，分离 X 中点，则或 $A=C_R(X)$ ，或存在 $x_0\in X$ 使 $A=\{f\in C_R(X); f(x_0)=0\}$.*

证明 分两种情形

(一) 对每个 $x\in X$ ，总有 $g\in A$ 使 $g(x)\ne 0$. 这时必有 $A=C_R(X)$.

由于 A 分离 X 中点， $\forall x_1,x_2\in X, x_1\ne x_2$ ，必有 $f\in A$ ，使 $f(x_1)\ne f(x_2)$. 不失一般性，可假定 $f(x_1)\ne 0$ ， $f(x_2)\ne 0$. 若不然，不妨设

$$0=f(x_1)<f(x_2)\ .$$

注意，存在 $g\in A$ ，使 $g(x_1)\ne 0$. 因 A 是线性的，可假设 $g(x_1)>0$. 可取 $\alpha>0$ ，使 $\|\alpha g\|<\frac{1}{10}f(x_2)$. 令 $f'=f+\alpha g$. 则

$$f'(x_1)\ne 0, f'(x_2)\ne 0, \text{且} f'(x_1)\ne f'(x_2)\ .$$

对任何实数 r_1,r_2 ，往证存在 $F\in A$ ，使

$$F(x_1)=r_1, F(x_2)=r_2\ .$$

事实上，以 α,β 为变量的方程组

$$\begin{cases}\alpha f(x_1)+\beta f^2(x_1)=r_1\\ \alpha f(x_2)+\beta f^2(x_2)=r_2\end{cases}$$

的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} f(x_1) & f^2(x_1) \\ f(x_2) & f^2(x_2) \end{vmatrix} = f(x_1)f^2(x_2) - f(x_2)f^2(x_1)$$
$$= f(x_1)f(x_2)(f(x_2) - f(x_1)) \neq 0.$$

因而方程组必有解 (α, β) ．这样取 $F = \alpha f + \beta f^2$ 即可.

于是对任何 $\varphi \in C_R(X)$ 及任何 $p, q \in X$ ，由前述存在 $F \in A$ ，使

$$F(p) = \varphi(p), F(q) = \varphi(q) .$$

再由引理 III.2.3 及 III.2.4 ，可知 $\varphi \in A$ ．故 $A = C_R(X)$ ．

(二) 若存在一点 $x_0 \in X$ ，使 $f(x_0) = 0$ ， $\forall f \in A$ ，则 $A = \{f \in C_R(X), f(x_0) = 0\}$ ．

只需证，等式左边包含右边，令

$$B = \{\lambda + f;\ f \in A,\ \lambda \in \mathbb{R}\} .$$

易见 B 是 $C_R(X)$ 的子代数而且分离 X 中点．设 $\lambda_n \in \mathbb{R}, f_n \in A, n = 1, 2, \cdots, \lambda_n + f_n \to g$ ．则 $g \in C_R(X)$ ．往证 $g \in B$ ．注意 g 可表为

$$g = g(x_0) + [g - g(x_0)] .$$

$g(x_0) \in \mathbb{R}$ ，只需证 $g - g(x_0) \in A$ ．注意

$$\lambda_n = \lambda_n + f_n(x_0) \to g(x_0),\ n \to \infty .$$

于是

$$f_n - (g - g(x_0)) = \lambda_n + f_n - g - (\lambda_n - g(x_0)) \to 0,\ n \to \infty .$$

而 A 是闭的，故 $g - g(x_0) \in A$ ．这样 $g \in B$ ，从而 B 亦是闭的．又 $\forall x \in X$ ，必有 $g \in B$ 使 $g(x) \neq 0$ ．事实上，取 $g = 1$ 即可．由 (一)， $B = C_R(X)$ ．

设 $f \in C_R(X)$ ， $f(x_0) = 0$ ．由 $f \in B$ ，存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ ， $g \in A$ 使 $f = \lambda + g$ ．考虑在 x_0 处值有

$$0 = f(x_0) = \lambda + g(x_0) = \lambda ,$$

故 $f = g \in A.$ ◇

推论 III.2.6 *如果 A 是 $C_R(X)$ 子代数，含 1 ，分离 X 中的点，则 A 在 $C_R(X)$ 中稠密，即 $\overline{A} = C_R(X)$ ．*

证明 因 $\overline{A}$ 亦分离 X 中的点，又包含 1 ，不可能在某点为 0 ，故只有 $\overline{A} = C_R(X)$ ．

特别地，实轴中紧集 X 上之全体实系数多项式形成 $C_R(X)$ 子代数，包含 1 ，分离 X 中点，故在 $C_R(X)$ 中稠密．这就是经典 Weierstrass 逼近定理. ◇

定理 III.2.7 *(复 Stone-Weierstras 定理) 设 X 是紧 Hausdorff 空间， A 是 $C(X)$ 之闭子代数，分离 X 中点，而且是自伴的，即当 $f \in A$ 时， $\overline{f} \in A$ ．那么或 $A = C(X)$ ，或存在某点 $x_0 \in X$ ，使 $A = \{f \in C(X); f(x_0) = 0\}$ ．*

证明 以 A_r 表示 A 中全体实值函数集合，则 A_r 是 $C_R(X)$ 的闭子代数． $\forall f \in A$ ，由 A 自伴， $\overline{f} \in A$ ，于是 f 之实部，虚部

$$f_1 = \tfrac{1}{2}(f + \overline{f}),\ f_2 = \tfrac{1}{2i}(f - \overline{f}) \in A.$$

而且 f_1, f_2 都是实值函数．故 $f_1, f_2 \in A_r$ ．由此可见 A_r 亦分离 X 中点．事实上， $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$ ，由 A 分离 X 中点，存在 $f \in A$ ，使 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，由 f_1, f_2 是 f 之实部和虚部，必有 $f_1(x_1) \neq f_1(x_2)$ ， $f_2(x_1) \neq f_2(x_2)$ 之一成立．故 A_r 是 $C_R(X)$ 之闭子代数，分离 X 中点．由定理 III.2.5 ，必有

(1) $A_r = C_R(X)$ ，

或者

(2) 存在某个 $x_0 \in X$ ，使 $A_r = \{f \in C_R(X), f(x_0) = 0\}$.

在 (1) 情形， $A = C(X)$. 而在 (2) 时， A 中函数 f 之实部，虚部皆于 x_0 处为 0 . 故 $A \subset \{f \in C(X), f(x_0) = 0\}$. 另方面， $f \in C(X), f(x_0) = 0$ ，则其实部 f_1 ，虚部 f_2 皆在 x_0 处为 0 . 从而 $f_1, f_2 \in A_r \subset A$. 于是 $f = f_1 + if_2 \in A$. $\diamond$

注：此定理中 A 是自伴的条件是不能取消的. 例如，取 $X = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$. A 是在 X 上连续且在 $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ 内解析的函数全体. 则 A 是 $C(X)$ 的闭子代数，含 1 ，分离 X 中点，但 $A \neq C(X)$. 因为 $\varphi(z) = \overline{z}$ 不是解析的，故 $\varphi \notin A$ ，但 $\varphi \in C(X)$. 之所以如此，即因 A 不是自伴的.

III.3 Riesz-Markov 定理

在本科泛函中大家已经知道，对 $C[0,1]$ 上每个有界线性泛函 l 都存在有界变差函数 α ，使

$$l(f) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}\alpha(t) ,$$

且

$$\|l\| = \mathrm{Var}(\alpha) .$$

这里 $\mathrm{d}\alpha(t)$ 是由 α 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度，而 $\mathrm{Var}(\alpha)$ 是 α 的全变差 (见 [2], §III.4 ，定理 4.3). 这是 1909 年 M. Riesz 证明的著名结果，后来 Markov 将这一结果推广到紧 Hausdorff 空间 X 上全体连续函数空间 $C(X)$ 上. 这节就介绍这一结果.

定义 III.3.1 设 X 是紧 Hausdorff 空间. $C(X)$(或 $C_R(X)$) 上线性泛函 l 称为<u>正的</u>，如果

$$l(f) \geq 0, \text{ 对所有} f \geq 0.$$

这里 $f \geq 0$ 指的是 $f(x) \geq 0,\ \forall x \in X$.

对正线性泛函有如下简单事实成立.

设 l 是 $C(X)$ 上正线性泛函，则

(i) 当 $f \in C_R(X)$ 时， $l(f)$ 是实数.

因 X 是紧的，必存在 $\alpha > 0$ 使 $f(x) + \alpha \geq 0,\ \forall x \in X$ ，即 $f + \alpha \geq 0$. 于是 $l(f) + l(\alpha) = l(f + \alpha) \geq 0$. 而 $l(\alpha) \geq 0$ ，故 $l(f)$ 是实数.

(ii) 若 $f, g \in C_R(X),\ f \geq g$ ，即 $f(x) \geq g(x), \forall x \in X$ ，则 $l(f) \geq l(g)$.

事实上，由 $f - g \geq 0, l(f-g) \geq 0$ ，而 $l(f-g) = l(f) - l(g)$ ，故 $l(f) \geq l(g)$.

命题 III.3.1 设 l 是 $C(X)$(或 $C_R(X)$) 上正线性泛函，则 l 是连续的，且 $\|l\| = l(1)$.

证明 只须就 $C(X)$ 情形来证.

设 $f \in C_R(X)$ ，则

$$-\|f\| \leq f \leq \|f\| ,$$

由 l 的正线性可得

$$-\|f\| l(1) \leq l(f) \leq \|f\| l(1) .$$

即 $|l(f)| \leq \|f\| l(1)$.

对一般的 $f \in C(X)$ ，设 $l(f) = re^{i\varphi}, r = |l(f)|, \varphi = \arg l(f)$ ，令 $f_1 = \mathrm{Re}\,(e^{-i\varphi}f), f_2 = \mathrm{Im}\,(e^{-i\varphi}f)$ ，则 $f_j \in C_R(X), j = 1, 2$ ，且

$$e^{-i\varphi}f = f_1 + if_2 .$$

于是

$$r = e^{-i\varphi}l(f) = l(e^{-i\varphi}f) = l(f_1) + il(f_2) .$$

比较实部，由已证

$$r = l(f_1) \le \|f_1\|l(1) \le \|f\|l(1) .$$

即 $|l(f)| \le \|f\|l(1)$ ．可见， l 是有界的，且 $\|l\| \le l(1)$ ．另一方面

$$l(1) \le \|l\|\|1\| = \|l\| .$$

故 $\|l\| = l(1)$ ． ◇

设 μ 是 X 上正则正的 Borel 测度，令

$$l(f) = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x), \forall f \in C(X) .$$

易见 l 是 $C(X)$ 上线性泛函，且

$$l(f) = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) \ge 0, 当 f \ge 0 .$$

即 l 是 $C(X)$ 上正线性泛函．反之有如下重要定理.

定理 III.3.2 (Riesz-Markov) 设 X 是紧 Hausdorff 空间，则对 $C_R(X)$ 上每个正线性泛函 l ，必存在 X 上唯一的正则的正 Borel 测度 μ ，使

$$l(f) = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x), \forall f \in C_R(X) .$$

此外， $\|l\| = \mu(X)$ ．

证明梗概：

设 V 是开集，定义

$$\mu(V) = \sup\{l(f); f \in C_R(X), 0 \le f \le \chi_V\} .$$

显然， $\mu(V) \le l(1)$ ．故 μ 总是有限的，若 V_1, V_2 皆是开集，且 $V_1 \subset V_2$ ，则 $\mu(V_1) \le \mu(V_2)$ ．

对 X 的每个子集 E ，定义

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V 是开集\} .$$

则定义是有意义的，而且 $\mu(E) < +\infty$ ．

一　直接往证 μ 是正则正 Borel 测度是困难的，间接进行．令 $\mathcal{M}$ 表示满足如下条件的 X 之子集 E 的全体：

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K):\ K \subset E,\ K 是紧集\} .$$

显然 $\mathcal{M}$ 包含全体紧集．想法证明 $\mathcal{M}$ 是一个 $\sigma-$ 代数，且包含全体开集，从而包含了 Borel 代数 $\mathcal{B}$ ．进一步证明 μ 是 $\mathcal{M}$ 上正测度．从而 $\mu|_{\mathcal{B}}$ 就是正则正 Borel 测度．分以下几步进行：

1 对任意开集 V_1 ， V_2 必有

$$\mu(V_1 \cup V_2) \le \mu(V_1) + \mu(V_2) .$$

2 假设 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ ，则

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) .$$

3 若 K 是紧集，则

$$\mu(K) = \inf\{l(f); f \in C_R(X), \chi_K \le f\} .$$

4 对每个开集 V ，有

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K); K \subset V, K\text{是紧集}\}\ .$$

5 设 $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{M}$ 中两两不交子集列， $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ ，则 $E \in \mathcal{M}$ ，且

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)\ .$$

6 $A \in \mathcal{M}$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$ ，存在紧集 K ，开集 G ，使

$$K \subset A \subset G,\ \text{且}\mu(G \backslash K) < \varepsilon\ .$$

7 若 $A, B \in \mathcal{M}$ ，则 $A \setminus B,\ A \cup B,\ A \cap B \in \mathcal{M}$ ，从而 $\mathcal{M}$ 是 $\sigma-$ 代数.

二 往证 $l(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu, \forall f \in C_R(X)$.

三 最后证明 μ 是唯一的.

详细证明参见 W. Rudin[5] 第 40 页至 47 页.

定理 III.3.3 设 X 是紧的 Hausdorff 空间，则对 $C(X)$ 上每个正线性泛函 l ，存在 X 上唯一正则正的 Borel 测度 μ ，使

$$l(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu, \forall f \in C(X)\ .$$

证明 由假设 $l|_{C_R(X)}$ 是 $C_R(X)$ 上正线性泛函，于是由定理 III.3.2 ，存在 X 上正则正的 Borel 测度 μ 使

$$l(u) = \int_X u\mathrm{d}\mu, \forall u \in C_R(X)\ .$$

任何 $f \in C(X)$ ，皆可表为 $f = u + iv,\ u, v \in C_R(X)$. 于是由 l 之线性

$$l(f) = l(u) + il(v) = \int_X u\mathrm{d}\mu + i\int_X v\mathrm{d}\mu = \int_X (u+iv)\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu.$$

假设又有 X 上正则正 Borel 测度 μ_1 ，使

$$l(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu_1, \forall f \in C(X).$$

特别对每个 $u \in C_R(X)$ 有

$$\int_X u\mathrm{d}\mu = l(u) = \int_X u\mathrm{d}\mu_1.$$

由定理 III.3.2 ， $\mu = \mu_1$. ◇

$C_R(X)$ 上有界线性泛函未必是正线性泛函，但总可以表成两个正线性泛函之差，为做到这点需要引理.

引理 III.3.4 设 $f, g, h \in C_R(X),\ f, g, h \geq 0$. 如果 $h \leq f + g$ ，则存在 $h_1, h_2 \in C_R(X)$ ，使

$$h = h_1 + h_2,\ 0 \leq h_1 \leq f,\ 0 \leq h_2 \leq g.$$

证明 令 $h_1 = \min\{f, h\}$ ，则 $h_1 \in C_R(X)$ ，且 $0 \leq h_1 \leq f$. 又令 $h_2 = h - h_1$. 由定义，$h_2 \in C_R(X)$ ，且 $h_2 \geq 0$. $\forall x \in X$ ，若 $h_1(x) = h(x)$ ，则 $h_2(x) = 0 \leq g(x)$ ；若 $h_1(x) = f(x)$ ，则 $h_2(x) = h(x) - h_1(x) \leq f(x) + g(x) - f(x) = g(x)$. 总之 $h_2 \leq g$ ，且 $h = h_1 + h_2$. ◇

定理 III.3.5 对每个 $l \in [C_R(X)]^*$ ，恰存在 $C_R(X)$ 上两个正线性泛函 l^+, l^- 使得

$$l = l^+ - l^-, \text{且}\|l\| = l^+(1) + l^-(1).$$

证明 考虑 $C_R(X)$ 的子集 $C_+(X) = \{f \in C_R(X); f \geq 0\}$. 在 $C_+(X)$ 上定义泛函 l^+ 如下：

$$l^+(f) = \sup\{l(h); h \in C_R(X), 0 \leq h \leq f\}.$$

因 $|l(h)| \leq \|l\|\|h\| \leq \|l\|\|f\|$ ，所以上式右端是有限值，定义有意义. 由定义 $l^+(f) \geq 0$ ，当 $f \in C_+(X)$ ，往证 l^+ 是线性的.

设 $t \in \mathbb{R}, t \geq 0, \forall h \in C_R(X), 0 \leq h \leq f$，总有 $0 \leq th \leq tf$，从而 $l(th) \leq l^+(tf)$，即

$$l(h) = \frac{1}{t}l(th) \leq \frac{1}{t}l^+(tf).$$

这样

$$l^+(f) = \sup\{l(h); 0 \leq h \leq f\} \leq \frac{1}{t}l^+(tf)\text{，}$$

即

$$tl^+(f) \leq l^+(tf).$$

取 tf 代替 f, $\frac{1}{t}$ 代替 t，由上式可得

$$\frac{1}{t}l^+(tf) \leq l^+(\tfrac{1}{t}tf) = l^+(f).$$

即 $l^+(tf) \leq tl^+(f)$．总之，当 $t \geq 0$，有

$$l^+(tf) = tl^+(f), \forall f \in C_+(X)\text{．}$$

又当 $f, g \in C_+(X)$，必有 $f+g \in C_+(X)$．$\forall \varepsilon > 0$，存在 $h \in C_R(X)$，使 $0 \leq h \leq f+g$，且

$$l^+(f+g) - \varepsilon < l(h)\text{．}$$

由引理 III.3.4 存在 $h_1, h_2 \in C_R(X)$ 使

$$h = h_1 + h_2, 0 \leq h_1 \leq f, 0 \leq h_2 \leq g\text{．}$$

于是

$$l(h) = l(h_1) + l(h_2) \leq l^+(f) + l^+(g)\text{，}$$

即 $l^+(f+g) - \varepsilon \leq l^+(f) + l^+(g)$．由 ε 任意性，可得

$$l^+(f+g) \leq l^+(f) + l^+(g)\text{．}$$

又 $\forall \varepsilon > o$，存在 $h_1, h_2 \in C_R(X)$，使 $0 \leq h_1 \leq f, 0 \leq h_2 \leq g$ 且

$$l^+(f) - \varepsilon < l(h_1), l^+(g) - \varepsilon < l(h_2)\text{．}$$

注意 $h_1 + h_2 \in C_R(X), 0 \leq h_1 + h_2 \leq f + g$, 故

$$l^+(f+g) \geq l(h_1+h_2) = l(h_1) + l(h_2) > l^+(f) + l^+(g) - 2\varepsilon.$$

由 ε 任意性可得

$$l^+(f+g) \geq l^+(f) + l^+(g)\text{．}$$

总之 $l^+(f+g) = l^+(f) + l^+(g)$．

对一般的 $f \in C_R(X)$，总有 Jordan 分解 $f = f^+ - f^-$， $f^+, f^- \in C_+(X)$．定义

$$l^+(f) = l^+(f^+) - l^+(f^-)\text{．}$$

则 l^+ 是 $C_R(X)$ 上正线性泛函．l^+ 是正的显然，只须证 l^+ 是线性的．设 $f, g \in C_R(X)$，$f = f^+ - f^-, g = g^+ - g^-, f^+, f^-, g^+, g^- \in C_+(X)$，是其 Jordan 分解，而

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-\text{．}$$

这样 $f^+ + g^+ - (f+g)^+ = (f^- + g^-) - (f+g)^-$．记 $\alpha = f^+ + g^+ - (f+g)^+$．由于 $f^+ = \frac{|f|+f}{2}, g^+ = \frac{|g|+g}{2}$， $(f+g)^+ = \frac{|f+g|+(f+g)}{2}$，可见 $\alpha \geq 0$，而且 $\alpha \in C_R(X)$．由于

$$f^+ + g^+ = (f+g)^+ + \alpha, f^- + g^- = (f+g)^- + \alpha\text{．}$$

这样

$$\begin{aligned} l^+(f) + l^+(g) &= l^+(f^+) - l^+(f^-) + l^+(g^+) - l^+(g^-) \\ &= l^+(f^+ + g^+) - l^+(f^- + g^-) \\ &= l^+((f+g)^+) + l^+(\alpha) - [l^+((f+g)^-) + l^+(\alpha)] \\ &= l^+((f+g)^+) - l^+((f+g)^-) = l^+(f+g). \end{aligned}$$

设 $t \in \mathbb{R}, t > 0, f \in C_R(X), f = f^+ - f^-$ ，则 $(tf) = (tf)^+ - (tf)^- = tf^+ - tf^-$ ．于是

$$l^+(tf) = l^+(tf^+) - l^+(tf^-) = tl^+(f^+) - tl^+(f^-) = tl^+(f).$$

若 $t < 0$ ， $f = f^+ - f^-$ ，则 $(tf) = (tf)^+ - (tf)^-$ ．其中 $(tf)^+ = (-t)f^-, (tf)^- = (-t)f^+$ ．于是

$$\begin{aligned} l^+(tf) &= l^+((-t)f^-) - l^+((-t)f^+) = -tl^+(f^-) - (-t)l^+(f^+) \\ &= t(l^+(f^+) - l^+(f^-)) = tl^+(f). \end{aligned}$$

总之， $l^+(tf) = tl^+(f)$ ．可见 l^+ 是 $C_R(X)$ 上正线性泛函．定义

$$l^- = l^+ - l\ .$$

由 l^+, l 之线性，可知 l^- 也是 $C_R(X)$ 上线性泛函．又当 $f \geq 0$, $l^+(f) \geq l(f)$ ．从而

$$l^-(f) = l^+(f) - l(f) \geq 0\ .$$

因而 l^- 是 $C_R(X)$ 上正线性泛函，显然有 $l = l^+ - l^-$ ．

往证 $\|l\| = l^+(1) + l^-(1)$ ．首先

$$\|l\| \leq \|l^+\| + \|l^-\| = l^+(1) + l^-(1)\ .$$

又

$$\begin{aligned} l^-(1) &= l^+(1) - l(1) \\ &= \sup\{l(h); h \in C_R(X), 0 \leq h \leq 1\} - l(1) \\ &= \sup\{l(h-1); h \in C_R(X), 0 \leq h \leq 1\}. \end{aligned}$$

于是， $\forall \varepsilon > 0$ ，存在 $h_1, h_2 \in C_R(X)$ ，使 $0 \leq h_1 \leq 1, 0 \leq h_2 \leq 1$ ，且

$$l^+(1) - \varepsilon < l(h_1),\ l^-(1) - \varepsilon < l(h_2 - 1).$$

从而

$$l^+(1) + l^-(1) - 2\varepsilon < l(h_1) + l(h_2 - 1) = l(h_1 + h_2 - 1).$$

注意 $0 \leq h_1 + h_2 \leq 2$ ，故 $-1 \leq h_1 + h_2 - 1 \leq 1$ ．于是

$$|l(h_1 + h_2 - 1)| \leq \|l\| \|h_1 + h_2 - 1\| \leq \|l\|.$$

即 $l^+(1) + l^-(1) - 2\varepsilon \leq \|l\|$ ．而 $\varepsilon > 0$ 是任意的，故 $l^+(1) + l^-(1) \leq \|l\|$ ．

最后证明唯一性，设又有正线性泛函 m^+, m^- 使

$$l = m^+ - m^-,\ \|l\| = m^+(1) + m^-(1)\ .$$

分两种情形往证 $l^+ = m^+, l^- = m^-$ ．

(1) 若 $m^+ \geq l^+$ ，即 $\forall f \in C_R(X), f \geq 0$ 总有 $m^+(f) \geq l^+(f)$ ，这时必有 $m^- \geq l^-$ ．事实上， $\forall f \geq 0$ ， $m^-(f) = m^+(f) - l(f) \geq l^+(f) - l(f) = l^-(f)$ ．于是 $m^+ - l^+, m^- - l^-$ 都是 $C_R(X)$ 上正线性泛函．

$$m^+(1) - l^+(1) \geq 0,\ m^-(1) - l^-(1) \geq 0.$$

但

$$[m^+(1) - l^+(1)] + [m^-(1) - l^-(1)] = [m^+(1) + m^-(1)] - [l^+(1) + l^-(1)] = 0\ .$$

这样 $m^+(1) - l^+(1) = 0$ ，且 $m^-(1) - l^-(1) = 0$ ．从而

$$\|m^+ - l^+\| = m^+(1) - l^+(1) = 0\ ,$$

$$\|m^- - l^-\| = m^-(1) - l^-(1) = 0\ .$$

所以 $m^+ = l^+, m^- = l^-$ ．

(2) 若有 $f \in C_R(X), f \geq 0$, 使 $m^+(f) < l^+(f)$, 由 l^+ 定义, 存在 $h \in C_R(X), 0 \leq h \leq f$, 使 $l(h) > m^+(f)$ ．即 $m^+(h) - m^-(h) > m^+(f)$ ，特别 $m^+(h) > m^+(f)$ ．这和 $h \leq f$ 及 m^+ 是

正线性泛函矛盾． ◇

定理 III.3.6 设 $l \in [C_R(X)]^*$ ，则存在 X 上唯一的正则实 Borel 测度 μ ，使

$$l(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu,\ \forall f \in C_R(X)\ ,$$

且 $\|l\| = \|\mu\|$.

证明 由定理 III.3.5，恰存在 $C_R(X)$ 上一对正线性泛函 l^+,l^- 使

$$l = l^+ - l^-, 且\|l\| = l^+(1) + l^-(1).$$

由 Riesz-Markov 定理，存在 X 上正则正的 Borel 测度 μ^+, μ^- ，使

$$l^+(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu^+, l^-(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu^-, \forall f \in C_R(X)\ ,$$

且 $\|l^+\| = \mu^+(X),\ \|l^-\| = \mu^-(X)$.

令 $\mu = \mu^+ - \mu^-$ ，则 μ 是 X 上正则实 Borel 测度，且

$$l(f) = l^+(f) - l^-(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu^+ - \int_X f\mathrm{d}\mu^- = \int_X f\mathrm{d}\mu\ ,\quad \forall f \in C_R(X)\ .$$

至于唯一性，设又有 X 上正则实 Borel 测度 μ_1 ，使

$$l(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu_1,\ \forall f \in C_R(X)\ .$$

令 $v = \mu - \mu_1$ ，则 v 亦是正则实 Borel 测度，且对任何 $f \in C_R(X)$ 总有

$$\int_X f\mathrm{d}v = \int_X f\mathrm{d}\mu - \int_X f\mathrm{d}\mu_1 = 0\ .$$

由定理 II.3.4 可知 $|v|$ 是正则正 Borel 测度．又由命题 II.1.10，存在 Borel 函数 g 使 $|g| = 1, a.e.$ 于 X ，且有极分解

$$\mathrm{d}v = g\mathrm{d}|v|\ .$$

这样，由 $|v|$ 是正则的， $C(X)$ 在 $L^1(X,|v|)$ 中稠密．存在连续函数 $f_n \in C(X)$ ，使

$$\int_X |f_n - \overline{g}|\mathrm{d}|v| \to 0, 当 n \to \infty.$$

从而

$$\int_X f_n\mathrm{d}v = \int_X f_n g\mathrm{d}|v| \to \int_X \overline{g}g\mathrm{d}|v| = \int_X \mathrm{d}|v| = |v|(X)\ .$$

令 $f_n = f_n^{(1)} + if_n^{(2)}$, $f_n^{(1)}, f_n^{(2)}$ 是 f_n 的实部和虚部，则 $f_n^{(1)},\ f_n^{(2)} \in C_R(X)$ ．于是

$$\int_X f_n\mathrm{d}v = \int_X f_n^{(1)}\mathrm{d}v + i\int_X f_n^{(2)}\mathrm{d}v = 0.$$

这样， $|v|(X) = 0$ ，即 $v = 0,\ \mu = \mu_1$ ． ◇

定理 III.3.7 设 X 是紧的 Hausdorff 空间，则 $[C(X)]^*$ 等距同构于 $\mathcal{M}(X)$.

证明 设 $l \in [C(X)]^*$ ，则 l 亦是 $C_R(X)$ 上连续线性泛函．令

$$l_1(u) = \frac{1}{2}[l(u) + \overline{l(u)}],\ l_2(u) = \frac{1}{2i}[l(u) - \overline{l(u)}],\ \forall u \in C_R(X)\ .$$

容易验证 l_1, l_2 是 $C_R(X)$ 上的连续线性泛函．根据定理 III.3.6，恰有 X 上实的正则 Borel 测度 μ_1, μ_2 使

$$l_j(u) = \int_X u\mathrm{d}\mu_j,\ \forall u \in C_R(X),\ j = 1, 2.$$

令 $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ ．则 μ 是 X 上正则复 Borel 测度，且

$$l(u) = l_1(u) + il_2(u) = \int_X u\mathrm{d}\mu_1 + i\int_X u\mathrm{d}\mu_2 = \int_X u\mathrm{d}\mu, \forall u \in C_R(X).$$

进而，对任何 $f \in C(X)$,$f = u + iv,\ u, v \in C_R(X)$ ，

$$l(f) = l(u) + il(v) = \int_X u\mathrm{d}\mu + i\int_X v\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu. \tag{3.1}$$

往证满足 (3.1) 式的正则复 Borel 测度 μ 是唯一的．设又有正则复 Borel 测度 μ' ，使

$$l(f) = \int_X f\mathrm{d}\mu',\ \forall f \in C(X).$$

记 $\mu' = \mu_1' + i\mu_2'$ ，其中 μ_1', μ_2' 都是正则实 Borel 测度，使

$$\mu_1\prime = \frac{1}{2}(\mu' + \overline{\mu'}),\ \mu_2\prime = \frac{1}{2i}(\mu' - \overline{\mu'}).$$

于是对任何 $u\in C_R(X)$ ，

$$\begin{aligned}\int_X u\mathrm{d}\mu_1 &= \frac{1}{2}[\int_X u\mathrm{d}\mu' + \int_X u\mathrm{d}\overline{\mu'}] = \frac{1}{2}(l(u)+\overline{l(u)})\\ &= l_1(u) = \int_X u\mathrm{d}\mu_1.\end{aligned}$$

由定理 III.3.5， $\mu_1'=\mu_1$ ．同理可证 $\mu_2'=\mu_2$ ，故 $\mu'=\mu$ ．

总之， $\forall l\in[C(X)]^*$ ，存在唯一的正则复 Borel 测度 μ_l 使

$$l(f)=\int_X f\mathrm{d}\mu_l,\ \forall f\in C(X). \tag{3.2}$$

定义映射 $\tau:[C(X)]^*\to\mathcal{M}(X)$ ，为 $\tau(l)=\mu_l$ ．显然映射 τ 是单射．设 $\mu\in\mathcal{M}(X)$ ，定义

$$l_\mu(f)=\int_X f\mathrm{d}\mu,\ \forall f\in C(X).$$

容易看出 $l_\mu\in[C(X)]^*$ ，而且 $\tau(l_\mu)=\mu$ ，因而 τ 是满射． τ 是线性映射是明显的，只须证 τ 是一个等距．首先由 (3.2)，

$$|l(f)|\le\int_X|f|\mathrm{d}|\mu_l|\le\|f\|\int_X\mathrm{d}|\mu_l|=\|f\|\|\mu_l\|.$$

可见 $\|l\|\le\|\mu_l\|$ ．

另一方面，由 μ_l 是正则的，从而 $|\mu_l|$ 亦是正则的，且 μ_l 关于 $|\mu_l|$ 绝对连续．于是存在 Borel 函数 φ ，使 $|\varphi|=1,\ [|\mu_l|]a.e.$ 于 X ，

$$\mathrm{d}\mu_l=\varphi\mathrm{d}|\mu_l|.$$

又由 $C(X)$ 在 $L^1(X,|\mu_l|)$ 中稠密，存在 $g_n\in C(X),\ |g_n(x)|\le1$ ，使 $\int_X|g_n-\overline{\varphi}|\mathrm{d}|\mu_l|\to0$ ．于是

$$l(g_n)=\int_X g_n\mathrm{d}\mu_l=\int_X g_n\varphi\mathrm{d}|\mu_l|\to\int_X\overline{\varphi}\varphi\mathrm{d}|\mu_l|=\int_X\mathrm{d}|\mu_l|=\|\mu_l\|.$$

而 $|l(g_n)|\le\|l\|\|g_n\|\le\|l\|$ ．故 $\|\mu_l\|\le\|l\|$ ．总之， $\|l\|=\|\mu_l\|$ ． ◇

练习题

1 设 f 是拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 上一个连续函数. 对 $x,y\in X$ ，如果 $f(x)=f(y)$, 则记为 $x\sim y$.

(1) 证明 " $\sim$ " X 上一个等价关系.

(2) 令 $\widetilde{X}=X/\sim$ ，$\pi: X\to\widetilde{X}$ 为自然映射. 记 $\pi(x)=[x]$. 对 $[x]\in\widetilde{X}$ ，令 $\widetilde{f}([x])=f(x)$. 那么 $\widetilde{f}$ 是 $\widetilde{X}$ 上函数，而且 $f=\widetilde{f}\circ\pi$.

(3) 令 $\widetilde{\mathcal{T}}=\{\widetilde{f}^{-1}(U): U\text{是开集}\}$ 那么 $\widetilde{\mathcal{T}}$ 是 $\widetilde{X}$ 中一个拓扑. 这个拓扑使得 $\widetilde{f}$ 是连续的.

(4) 如果 X 是紧的，则 $\widetilde{X}$ 也是紧的.

2 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间， $\widetilde{X}=X\cup\{\infty\}$ 是 X 的一点紧致化空间. 令 $C_0(X)=\{f\in C_R(\widetilde{X}): f(\infty)=0\}$. 如果 $\mathcal{A}$ 是 $C_0(X)$ 的闭子代数, 分离 X 中点, 而且对 $\forall x\in X$ ，存在 $f\in\mathcal{A}$ 使得 $f(x)\neq 0$ ，则 $\mathcal{A}=C_0(X)$.

3 设 X 是一个紧 Hausdorff 空间， B 是 $C_R(X)$ 的闭理想. 记 $Y=\{x\in X: f(x)=0,\ \forall f\in B\}$. 证明：

(1) 对 $x,y\in X\setminus Y$ ，存在 $f\in B$ 使得 $0\neq f(x)\neq f(y)\neq 0$.

(2) $B=\{f\in C_R(X): f(x)=0,\forall x\in Y\}$.

4 设 X 为复平面中非空紧子集. 令

$$\mathcal{P}=\{p\in C(X): \exists n\geq 0 \text{ 和}\alpha_{j,k}\in\mathcal{C}\text{使得}p(z)=\sum_{j,k=0}^{n}\alpha_{j,k}z^j\overline{z}^k,\ \forall z\in X\}.$$

证明： $\mathcal{P}$ 在 $C(X)$ 中稠密.

5 φ 称为一个三角多项式，如果存在复系数 $\{a_j,\ b_j\}_j$ 及整数 n 使得 $\varphi(t)=\sum\limits_{j=0}^{n}(a_j\cos(jt)+b_j\sin(jt))$ ， $\forall t\in[-\pi,\pi]$. 证明：三角多项式的全体在 Banach 代数 $\{f\in C[-\pi,\pi]; f(\pi)=f(-\pi)\}$ 中稠密.

6 令 X 为一线性空间. 函数 $\rho: X\longrightarrow[0,+\infty)$ 称为一个 X 上的半范数，如果

(1) $\rho(x)\geq 0$ ， $\forall x\in X$.

(2) $\rho(\alpha x)=|\alpha|\rho(x)$ ， $\forall\alpha\in\mathcal{C},\ x\in X$.

(3) $\rho(x+y)\leq\rho(x)+\rho(y)$ ， $\forall x,y\in X$.

记 $M=\{x\in X: \rho(x)=0\}$. 证明：

(a) M 是 X 的线性子空间.

(b) 对 $[x]\in X/M$ ，定义 $\widetilde{\rho}([x])=\rho(x)$. 那么 $\widetilde{\rho}$ 是 X/M 上一个范数.

7 设 X 是一个 Banach 空间， $T\in\mathcal{B}(X)$. 令 $M=\operatorname{Ker}T$. 证明：存在 $\widetilde{T}\in\mathcal{B}(X/M,X)$ 满足：

(1) $\widetilde{T}$ 是单射.

(2) $T=\widetilde{T}\pi$ ，这里 $\pi: X\longrightarrow X/M$ 是自然映射.

8 证明闭值域定理，即如果 T 是 Banach 空间 X 上有界线性算子， T' 是 T 的 Banach 共轭算子，则 $\operatorname{Ran}T$ 闭当且仅当 $\operatorname{Ran}T'$ 闭.

9 设 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $[0,1]$ 上一列正 Borel 测度，且 $\mu_n([0,1])=1$ ， $\forall n\geq 1$. 证明存在子列 $\{\mu_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 及 $[0,1]$ 上正 Borel 测度 μ 满足：

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]} f\mathrm{d}\mu_{n_k} = \int_{[0,1]} f\mathrm{d}\mu ,$$

$\forall f \in C[0,1]$. 进而 $\mu([0,1]) = 1$.

10 令 $B[0,1]$ 为 $[0,1]$ 上有界 Borel 函数的全体. 对 $f \in B[0,1]$, 定义 $\|f\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. 那么 $\|\cdot\|$ 使得 $B[0,1]$ 成为一个 Banach 空间，而且 $C[0,1]$ 是它的子空间. 不用 Hahn-Banach 定理，试证明对每个 $C[0,1]$ 上有界线性泛函 f ，存在 $B[0,1]$ 上有界线性泛函 F 使得 $F|_{C[0,1]} = f$ 而且 $\|F\| = \|f\|$.

11 证明：对 $[0,1]$ 上每个连续的正 Borel 测度 μ , 存在一列绝对连续的正 Boerl 测度 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\int_{[0,1]} f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f\mathrm{d}\mu_n ,$$

$\forall f \in C[0,1]$.

试问，上述结论对非连续的正 Borel 测度 μ 是否成立？

第四章　自伴算子谱论

众所周知，对有限维空间 $\mathbb{C}^n$ 上自伴算子 A ，适当选取基底后可以将其表示成一个实对角矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

其中 $\lambda_j, j = 1, 2, \cdots, n$, 都是实数. 它们是 A 的特征值. 这样对任何 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, 有

$$Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots, \lambda_n x_n) \, .$$

对无穷维可分 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$, 若 A 是 $\mathcal{H}$ 上紧自伴算子，由 Hilbert-Schmidt 定理可知，存在 $\mathcal{H}$ 的正规正交基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使 A 可在这个基底下表示成实对角矩阵，只是这时不再是有限矩阵，而是无穷矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

对 $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j e_j, x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty$, 有 $Ax = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j e_j$.

对任何 $n \in \mathbb{N}$ ，令 $P_n(x) = x_n e_n$ ，对 $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j e_j$ ，则 P_n 是 $\mathcal{H}$ 到 $S_p\{e_n\}$ 上的一秩射影，容易证明级数 $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ 按算子范数拓扑收敛.

对一般的自伴算子，未必会有这样好的结果．我们已知对 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子 A ，存在唯一的射影值谱测度 $\{E_\lambda; -\infty < \lambda < \infty\}$ ，使得

$$A = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_\lambda \, ,$$

这里 $m = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$ ， $M = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$ ．这就是著名的自伴算子谱分解定理，它在本科生的泛函分析课程中已经介绍过，但没有证明，现在我们将详细给出证明.

IV.1　连续函数演算

以下总是用 $\mathcal{H}$ 来表示 Hilbert 空间， $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上的全体有界线性算子构成的 Banach 代数. 对 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\rho(T)$ 和 $\sigma(T)$ 分别表示 T 的预解集和谱． $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}, \lambda \in \rho(T)$, 表示 T 的预解式，它是 $\rho(T)$ 上的算子值解析函数．记 $\mathcal{A}(\sigma(T))$ 为所有在 $\sigma(T)$ 上解析的复值函数集合，则它是一个代数．对每个 $f \in \mathcal{A}(\sigma(T))$,

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda) R(\lambda, T) \mathrm{d}\lambda$$

定义了 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 中的一个有界线性算子．这里 C 是位于 f 的解析区域内围绕 $\sigma(T)$ 的任意正向简单可求长的闭曲线．可以证明 $f(T)$ 不依赖于 C 的选择．通常称 $f(T)$ 为 T 的 Riesz-Dunford

函数演算．映射 $J: f \mapsto f(T)$ 是一个代数同态，即

$$\begin{aligned}&J(f+g)=J(f)+J(g),\\&J(\alpha f)=\alpha J(f),\\&J(fg)=J(f)J(g),\end{aligned}$$

对任意的 $f,g\in\mathcal{A}(\sigma(T)),\alpha\in\mathbb{C}$ ． 而且

$$\begin{aligned}&J(1)=I,\\&J(f_0)=T,\text{当}f_0(\lambda)=\lambda,\lambda\in\mathbb{C}.\end{aligned}$$

特别的，若 $p(\lambda)=\sum\limits_{j=0}^{n}a_j\lambda^j$ 是多项式，则 $J(p)=p(T)=\sum\limits_{j=0}^{n}a_jT^j$ ．

关于 Riesz-Dunford 函数演算，谱映射定理成立.

定理 IV.1.1 设 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ， $f\in\mathcal{A}(\sigma(T))$ ，则 $\sigma(f(T))=f(\sigma(T))=\{f(\lambda);\lambda\in\sigma(T)\}$ ．

证明 假设 f 在区域 $D\supset\sigma(T)$ 上解析, 我们首先验证 $f(\sigma(T))\subset\sigma(f(T))$. 设 $\lambda_0\in\sigma(T)$, 对 $\mu\in D$ ，令

$$g(\mu)=\begin{cases}\frac{f(\mu)-f(\lambda_0)}{\mu-\lambda_0} & ,\mu\neq\lambda_0,\\ f'(\lambda_0) & ,\mu=\lambda_0.\end{cases}$$

易见 $g(\mu)$ 是 D 上解析函数，且 $(\mu-\lambda_0)g(\mu)=f(\mu)-f(\lambda_0),\forall\mu\in D$ ． 于是由 Riesz-Dunford 函数演算性质可知 $(T-\lambda_0I)g(T)=g(T)(T-\lambda_0I)=f(T)-f(\lambda_0)I$ ，若 $f(\lambda_0)\notin\sigma(f(T))$ ，则 $B=(f(T)-f(\lambda_0)I)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ． 而

$$(T-\lambda_0I)g(T)B=(f(T)-f(\lambda_0)I)B=I,\quad Bg(T)(T-\lambda_0I)=B(f(T)-f(\lambda_0)I)=I.$$

即 $T-\lambda_0I$ 左可逆且右可逆，从而 $T-\lambda_0I$ 可逆，这与 $\lambda_0\in\sigma(T)$ 矛盾，故 $f(\lambda_0)\in\sigma(f(T))$ ，即 $f(\sigma(T))\subset\sigma(f(T))$ ．

假若有 $\lambda_0\in\sigma(f(T))\setminus f(\sigma(T))$, 则存在区域 D_1 , 使得 $D\supset D_1\supset\sigma(T)$, 且 $\lambda_0\notin f(D_1)$, 令

$$h(\mu)=\tfrac{1}{f(\mu)-\lambda_0},\mu\in D_1\ ,$$

则 h 是 $\sigma(T)$ 上的解析函数, 且 $[f(\mu)-\lambda_0]h(\mu)=h(\mu)[f(\mu)-\lambda_0]=1,\mu\in D_1$. 由 Riesz-Dunford 函数演算，$[f(T)-\lambda_0I]h(T)=h(T)[f(T)-\lambda_0I]=I$. 可见 $f(T)-\lambda_0I$ 可逆, 这与 $\lambda_0\in\sigma(f(T))$ 矛盾，故 $\sigma(f(T))=f(\sigma(T))$. ◇

定义 IV.1.1 设 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，若 $TT^*=T^*T$ ，则称 T 为正规算子.

若 A 是自伴算子， p 是多项式，容易看出 $p(A)$ 未必是自伴算子，但 $p(A)$ 一定是正规算子，正规算子也具有自伴算子的一些性质，例如：

引理 IV.1.2 设 T 是正规算子，则谱半径 $r(T)=\|T\|$.

证明 首先，对任何 $x\in\mathcal{H}$ 有

$$\begin{aligned}\|T^2\|^2&=\sup_{\|x\|=1}(T^2x,T^2x)=\sup_{\|x\|=1}((T^2)^*T^2x,x)\\&=\sup_{\|x\|=1}((T^*T)(T^*T)x,x)=\sup_{\|x\|=1}((T^*T)x,(T^*T)x)=\|T^*T\|^2,\end{aligned}$$

故 $\|T^2\|=\|T^*T\|=\|T\|^2$ ． 用归纳法可知，对任何 $n\in\mathbb{N}$ ，有 $\|T^{2^n}\|=\|T\|^{2^n}$ ． 于是由谱半径公式可知

$$r(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^{2^n}\|^{2^{-n}}=\|T\|\ .$$ ◇

定理 IV.1.3 设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子，则对任何多项式 $p(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}a_j\lambda^j$ ，总有

$$\|p(A)\|=r(p(A))=\|p\|_\infty\triangleq\sup\{|p(\lambda)|:\lambda\in\sigma(A)\}.$$

证明 由前面讨论， $p(A)$ 是正规算子．根据引理 IV1.2， $\|p(A)\|=r(p(A))$ ．再由谱映射定理， $\sigma(p(A))=p(\sigma(A))$ ，于是

$$r(p(A))=\sup\{|\mu|:\mu\in\sigma(p(A))\}=\sup\{|\mu|:\mu\in p(\sigma(A))\}=\sup\{|p(\lambda)|:\lambda\in\sigma(A)\}=\|p\|_\infty.$$ ◇

定理 IV.1.3 的重要性在于它表明，对自伴算子来说， Riesz-Dunford 函数演算是一个等距代数同态．下面把对自伴算子的解析函数演算推广到连续函数类上．

设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子， $C(\sigma(A))$ 表示 $\sigma(A)$ 上连续函数代数．用 $\mathcal{P}$ 表示全体多项式集合，根据 Stone-Weierstrass 定理， $\mathcal{P}$ 是 $C(\sigma(A))$ 中的稠子集．

对 $f\in C(\sigma(A))$ ，取多项式序列 $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ ，使 $\|p_n-f\|_\infty\to 0$ ，当 $n\to\infty$ ．从而 $\|p_n-p_m\|_\infty\to 0$ ，当 $n,\,m\to\infty$ ．根据定理 IV1.3，

$$\|p_n(A)-p_m(A)\|=\|p_n-p_m\|_\infty\to 0.$$

这说明 $\{p_n(A)\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 中的 Cauchy 列．由 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的完备性，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n(A)$ 存在，定义

$$f(A)=\lim_{n\to\infty}p_n(A).$$

注意 $f(A)$ 不依赖于多项式序列 $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ 的选择．事实上，若又有多项式序列 $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ ，使得 $\|q_n-f\|_\infty\to 0$ ，当 $n\to\infty$ ．则

$$\|p_n-q_n\|_\infty\le\|p_n-f\|_\infty+\|f-q_n\|_\infty\to 0,当n\to\infty.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}p_n(A)=\lim_{n\to\infty}q_n(A).$$

因而 $f(A)$ 的定义是合理的．称如此定义的 $f(A)$ 是 A 的连续函数演算．这样我们得到映射 $J:C(\sigma(A))\to\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，

$$J(f)=f(A),\quad\forall f\in C(\sigma(A)).$$

容易验证它是一个代数同态，注意

$$\|f(A)\|=\lim_{n\to\infty}\|p_n(A)\|=\lim_{n\to\infty}\|p_n\|_\infty=\|f\|_\infty.$$

可见它还是一个等距.

定理 IV.1.4 (自伴算子的连续函数演算) 设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子，则存在唯一的从 $C(\sigma(A))$ 到 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的映射 $J:f\to f(A)$ ，具有下列性质：

(a) J 是代数 $*-$ 同态，即

$$J(f+g)=J(f)+J(g)\quad J(\alpha f)=\alpha J(f),$$
$$J(fg)=J(f)J(g)\qquad J(\bar f)=J(f)^*,$$

对任意 $f,\,g\in C(\sigma(A)),\ \alpha\in\mathbb{C}$.

(b) $J(1)=I$ ；若 $f_0(\lambda)=\lambda,\ \lambda\in\sigma(A)$ ，则 $J(f_0)=A$.

(c) J 是等距，即 $\|J(f)\|=\|f\|_\infty,\ \forall f\in C(\sigma(A))$.

(d) 若 $A\phi=\lambda\phi,\ \lambda\in\mathbb{C},\ \phi\in\mathcal{H}$ ，则 $f(A)\phi=f(\lambda)\phi,\ \forall f\in C(\sigma(A))$.

(e) 若 $f\in C(\sigma(A))$ 是实值函数，则 $f(A)$ 是自伴算子．若 $f\ge 0$ ，则 $f(A)$ 是正算子.

(f) 谱映射定理成立，即 $\sigma(f(A))=f(\sigma(A)),\forall f\in C(\sigma(A))$.

(g) 若 $S\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，使 $SA=AS$ ，则 $Sf(A)=f(A)S,\forall f\in C(\sigma(A))$.

证明 (a)、(b)、(c) 容易验证，而且显然满足 (a)、(b)、(c) 的映射是唯一的.

(d) 若 $A\phi=\lambda\phi,\ \lambda\in\mathbb{C},\ \phi\in\mathcal{H}$，则对任何多项式 p， $p(A)\phi=p(\lambda)\phi$．对任意的 $f\in C(\sigma(A))$，有多项式序列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $\lim\limits_{n\to 0}\|p_n-f\|_\infty=0$．从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\|p_n(A)-f(A)\|=0$．在方程 $p_n(A)\phi=p_n(\lambda)\phi$ 两边令 $n\to\infty$ 可得 $f(A)\phi=f(\lambda)\phi$．

(e) 若 $f\in C(\sigma(A))$ 是实值函数，则 $f=\bar{f}$．由 (a)，

$$[f(A)]^*=\bar{f}(A)=f(A)\ .$$

即 $f(A)$ 是自伴算子. 若 $f\geq 0$，令 $g(\lambda)=\sqrt{f(\lambda)},\ \lambda\in\sigma(A)$，则 $g\in C(\sigma(A))$ 是实值函数. 且 $f=g^2$，由 (a) 得 $f(A)=g(A)g(A)=[g(A)]^*g(A)\geq 0$．因此 $f(A)$ 是正算子.

(f) 若 $\lambda\notin f(\sigma(A))$，令 $g(\mu)=\frac{1}{f(\mu)-\lambda},\ \mu\in\sigma(A)$，则 $g\in C(\sigma(A))$．且

$$g(\mu)[f(\mu)-\lambda]=[f(\mu)-\lambda]g(\mu)=1,\ \mu\in\sigma(A)\ .$$

由 (a)，$g(A)[f(A)-\lambda I]=[f(A)-\lambda I]g(A)=I$．这表明 $\lambda\notin\sigma(f(A))$，故 $\sigma(f(A))\subset f(\sigma(A))$．

若 $\mu_0\in f(\sigma(A))$，则有 $\lambda_0\in\sigma(A)$ 使 $\mu_0=f(\lambda_0)$．令 $f_0(\lambda)=f(\lambda)-\mu_0$， $\forall\lambda\in\sigma(A)$．则 λ_0 是函数 f_0 的零点. 取多项式列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|p_n-f_0\|_\infty=0$．则 $\lim\limits_{n\to\infty}|p_0(\lambda_0)|=\lim\limits_{n\to\infty}|p_n(\lambda_0)-f_0(\lambda_0)|=0$．不妨设 $p_n(\lambda_0)=0$， $\forall n\geq 1$(否则，以 $p_n-p_n(\lambda_0)$ 代替 p_n 即可)．这样， $0\in p_n(\sigma(A))=\sigma(p_n(A))$， $\forall n\geq 1$．因 $\lim\limits_{n\to\infty}\|p_n(A)-f_0(A)\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|p_n-f_0\|_\infty=0$，根据谱的上半连续性， $0\in\sigma(f_0(A))$．而 $f_0(A)=f(A)-\mu_0 I$，故 $\mu_0\in\sigma(f(A))$．这证明了 $f(\sigma(A))\subset\sigma(f(A))$．

(g) 若 $S\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$，使 $SA=AS$，则对任意多项式 p，有 $Sp(A)=p(A)S$．

对任意 $f\in C(\sigma(A))$，有多项式序列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $\|p_n-f\|_\infty\to 0,\ n\to\infty$．从而在 $Sp_n(A)=p_n(A)S$ 两边令 $n\to\infty$，可得 $Sf(A)=f(A)S,\ \forall f\in C(\sigma(A))$． ◇

IV.2 正算子平方根与算子极分解

回忆在本科生泛函分析课程中, 我们知道, 若 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$，使得对任何 $x\in\mathcal{H}$，有 $(Ax,x)\geq 0$，则称 A 为正算子，记为 $A\geq 0$．

像非负实数都有唯一的非负平方根一样，正算子也有唯一的非负平方根.

定理 IV.2.1 *设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是正算子，则存在唯一的正算子 $B\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$，使得 $A=B^2$，记为 $B=\sqrt{A}$ 或 $A^{\frac{1}{2}}$．若 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H}$ 使得 $AT=TA$，则 $\sqrt{A}T=T\sqrt{A}$．*

证明 因为 $A\geq 0$，所以 $\sigma(A)\subset[0,+\infty)$．令 $f(\lambda)=\sqrt{\lambda},\lambda\in[0,+\infty)$．则 $f\in C(\sigma(A))$，且 $f^2=f_0$，这里 $f_0(\lambda)=\lambda,\ \lambda\in[0,+\infty)$．于是 $f(A)\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是正算子，且 $f(A)^2=A$．记 $B=f(A)$，它即为所求. 若 $TA=AT$，由定理 IV.1.4 (g)，$Tf(A)=f(A)T$，即 $TB=BT$．

下面证明唯一性. 若有正算子 B_1 使得 $B_1^2=A$，则 $B_1A=AB_1$，从而 $B_1B=BB_1$．注意 $C\triangleq(B-B_1)B(B-B_1)$ 和 $D\triangleq(B-B_1)B_1(B-B_1)$ 都是正算子，而

$$\begin{aligned}C+D&=(B-B_1)B(B-B_1)+(B-B_1)B_1(B-B_1)\\&=(B-B_1)(B+B_1)(B-B_1)\\&=(B^2-B_1^2)(B-B_1)\\&=0.\end{aligned}$$

故 $C=0$， $D=0$．于是 $C-D=0$．而

$$C-D=(B-B_1)B(B-B_1)-(B-B_1)B_1(B-B_1)=(B-B_1)^3$$

故 $(B-B_1)^4=(C-D)(B-B_1)=0$. 又注意到 $B-B_1$ 是自伴的，所以

$$\|B-B_1\|^4=\|(B-B_1)^4\|=0 .$$

故 $B-B_1=0$ ，即 $B=B_1$. ◇

命题 IV.2.2 设 $A,\ A_n\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ， $A_n\geq 0$ ， $n=1,2\cdots$.

(a) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A-A_n\|=0$ ，则 $A\geq 0$ ，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\sqrt{A}-\sqrt{A_n}\|=0$.

(b) 若 SOT-$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$ ，则 $A\geq 0$ ，且 SOT-$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{A_n}=\sqrt{A}$.

证明 由正算子定义可知，两种情况下都有 $A\geq 0$.

(a) 不妨设 $\|A_n\|\leq 1$ ，$\forall n\geq 1$. 那么 $\|A\|\leq 1$. 于是 $\sigma(A_n)\subset[0,1]$ ，$\forall n$ ，$\sigma(A)\subset[0,1]$. 令

$$f(t)=\sqrt{t},\ t\in[0,1] .$$

则 f 是 $[0,1]$ 上连续函数. 由 Stone-Weierstrass 定理，存在多项式序列 $\{p_m\}_{m=1}^\infty$ 使得

$$\lim_{m\to\infty}\|p_m-f\|_\infty=\lim_{m\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}|p_m(t)-f(t)|=0 .$$

$\forall\varepsilon>0$ ， $\exists M\in\mathbb{N}$ ，使当 $m\geq M$ 时， $\|p_m-f\|_\infty<\varepsilon/3$. 由自伴算子的连续函数演算，

$$\|p_M(A)-f(A)\|<\varepsilon/3$$
$$\|p_M(A_n)-f(A_n)\|<\varepsilon/3,$$

$\forall n\geq 1$. 对每个 m ，因 p_m 是多项式， $\lim\limits_{n\to\infty}\|p_m(A_n)-p_m(A)\|=0$. 这样，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得，当 $n\geq N$ 时，

$$\|p_M(A_n)-p_M(A)\|<\varepsilon/3 .$$

于是，当 $n\geq N$ 时，

$$\begin{aligned}&\|f(A_n)-f(A)\|\\ \leq\ &\|f(A_n)-p_M(A_n)\|+\|p_M(A_n)-p_M(A)\|+\|p_M(A)-f(A)\|<\varepsilon.\end{aligned}$$

即，当 $n\geq N$ 时， $\|\sqrt{A_n}-\sqrt{A}\|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\sqrt{A_n}-\sqrt{A}\|=0$.

(b) 如 (a) 一样, 取 $f(t)=\sqrt{t},\ t\in[0,1]$, 多项式序列 $\{p_m\}_{m=1}^\infty$, 使 $\lim\limits_{m\to\infty}\|p_m-f\|_\infty=0$. 从而， $\forall\varepsilon>0$ ，存在 $M\in\mathbb{N}$ ，使 $\|p_M-f\|_\infty<\varepsilon/3$. 于是，

$$\|p_M(A)-f(A)\|<\varepsilon/3 ,$$
$$\|p_M(A_n)-f(A_n)\|<\varepsilon/3 ,\quad \forall n\geq 1 .$$

由于 SOT-$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$ ，根据命题 I.6.2 ， $\forall k\in\mathbb{N}$ ， SOT-$\lim\limits_{n\to\infty}A_n^k=A^k$. 从而 SOT-$\lim\limits_{n\to\infty}p_M(A_n)=p_M(A)$. 于是，$\forall x\in\mathcal{H}$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使当 $n\geq N$ 时，$\|p_M(A_n)x-p_M(A)x\|<\varepsilon/3$. 这样，

$$\begin{aligned}&\|f(A_n)x-f(A)x\|\\ \leq\ &\|[f(A_n)-p_M(A_n)]x\|+\|[p_M(A_n)-p_M(A)]x\|+\|[p_M(A)-f(A)]x\|\\ \leq\ &\|f(A_n)-p_M(A_n)\|\,\|x\|+\varepsilon/3+\|f(A)-p_M(A)\|\,\|x\|\\ <\ &(2\|x\|+1)\cdot\varepsilon/3.\end{aligned}$$

可见， $\forall x\in\mathcal{H},\ \lim\limits_{n\to\infty}f(A_n)x=f(A)x$. 故 SOT-$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{A_n}=\sqrt{A}$. ◇

命题 IV.2.3 设 $A,\ B\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 都是正算子，且 $AB=BA$ ，则 AB 亦是正算子，而且 $\sqrt{AB}=\sqrt{A}\sqrt{B}$.

证明 由假设， $\sqrt{A}$ ， $\sqrt{B}$ 都是正算子．根据定理 IV.2.1 ， $\sqrt{A}\sqrt{B}=\sqrt{B}\sqrt{A}$ ．于是，

$$\begin{aligned}(ABx,x) &= ((\sqrt{A})^2(\sqrt{B})^2x,x)=((\sqrt{A}\sqrt{B})(\sqrt{A}\sqrt{B})x,x)\\ &= ((\sqrt{A}\sqrt{B})x,\sqrt{A}\sqrt{B}x)\geq 0,\forall x\in\mathcal{H}.\end{aligned}$$

故 AB 是正算子．同理， $\sqrt{A}\sqrt{B}$ 亦是正算子．又

$$(\sqrt{A}\sqrt{B})^2=\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{A}\sqrt{B}=\sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{B}=AB\ .$$

由正算子平方根的唯一性， $\sqrt{AB}=\sqrt{A}\sqrt{B}$ ． ◇

定义 IV.2.1 对 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，记 $|A|=\sqrt{A^*A}$ ，称为 A 的 <u>模</u>．

算子的模与数的模有相似之处，如

(i) 若 $A\geq 0$ ，则 $|A|=A$ ；

(ii) $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ ， $|\lambda A|=|\lambda|\,|A|$ ．

但也有许多不同之处，例如，下面三式未必成立.

(a) $|AB|=|A|\,|B|$ ；

(b) $|A+B|\leq|A|+|B|$ ；

(c) $|A^*|=|A|$ ．

例 IV.2.1 取 S 为 l^2 上的单边移位算子

$$S\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots\}=\{0,\xi_1,\xi_2,\cdots\}\ ,\quad \forall\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^2\ .$$

则 $S^*S=I$ ， $SS^*=P$ ，这里 P 是 l^2 到 $\{\{\xi_n\}\in l^2:\xi_1=0\}$ 上的正交射影．于是 $|S|=1$ ， $|S^*|=P$ ．可见， $|S|\neq|S^*|$ ．而且 $|S^*S|=I\neq PI=|S^*|\,|S|$ ．

例 IV.2.2 设 $\mathcal{H}=\mathbb{C}^2$ ，

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

则

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

注意 A ， B 和 $A+B$ 都是自伴的，而

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix},\quad B^2=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad (A+B)^2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

于是，

$$|A|=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad |B|=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad |A+B|=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

而

$$|A|+|B|=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

取 $x=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ ，则 $(|A+B|x,x)=(\sqrt{2}x,x)=2\sqrt{2}$ ．而

$$((|A|+|B|)x,x)=\left(\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)=2\ .$$

可见， $|A+B|\leq|A|+|B|$ 不成立.

命题 IV.2.4 设 $A,\ A_n\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ， $n=1,2,\cdots$ ．

(a) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n-A\|=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\,|A_n|-|A|\,\|=0$．

(b) 若 SOT-$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，且 SOT-$\lim\limits_{n\to\infty}A_n^*=A^*$，则 SOT-$\lim\limits_{n\to}|A_n|=|A|$．

证明 (a) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n-A\|=0$，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n^*-A^*\|=0$．从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n^*A_n-A^*A\|=0$．由命题 IV.2.2，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\,|A_n|-|A|\,\|=0$．

(b) 由假设及命题 I.6.2，SOT-$\lim\limits_{n\to\infty}A_n^*A_n=A^*A$．再由命题 IV.2.2 可知，SOT-$\lim\limits_{n\to\infty}|A_n|=|A|$． $\diamond$

注意，这个命题之 (b) 中条件 “SOT-$\lim\limits_{n\to\infty}A_n^*=A^*$” 去掉后，结论不再成立．例如，取 S 是例 IV.2.1 中的单边移位算子．令 $A_n=S^{*n}+I$， $A=I$，则 SOT-$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$．取 $e_0=\{1,0,0,\cdots\}\in l^2$．注意， $A_n^*A_n=S^nS^{*n}+S^n+S^{*n}+I$．故

$$\|\,|A_n|^2e_0\|^2=\|A_n^*A_ne_0\|^2=\|S^ne_0+e_0\|^2=2\not\to1=\|e_0\|^2=\|\,|A|^2e_0\|^2.$$

所以， $|A_n|\not\to|A|$ (SOT)．

命题 IV.2.4 对弱算子拓扑也不成立．例如，取 S 为单边移位，我们知道， WOT-$\lim\limits_{n\to\infty}S^n=0$，但 $|S^n|=I\not\to0$ (WOT)．

引进算子模的概念以后，可以考虑算子的极分解．我们知道，对每个复数 z，都有三角表示 $z=re^{i\theta}$，其中 $r=|z|\stackrel{\triangle}{=}\sqrt{\bar zz}$ 是 z 的模．同样，对有界线性算子，亦有这种表示．

设 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$， $\operatorname{Ker}T$ 表示 T 之核空间， $\operatorname{Ran}T$ 表示 T 之值域，容易证明

$$\operatorname{Ker}T=\operatorname{Ker}(T^*T)=\operatorname{Ker}|T|.$$

定义 IV.2.2 设 $U\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$，若对每个 $x\in(\operatorname{Ker}U)^\perp$ 都有 $\|Ux\|=\|x\|$，则称 U 是一个部分等距．其中 U 之核空间之直交补 $(\operatorname{Ker}U)^\perp$ 称为 U 之 初始空间(initial subspace)， U 之值域 $\operatorname{Ran}U$ 称为 U 之 终空间(final subspace)．

部分等距是等距的推广，易见部分等距的值域总是闭的．

命题 IV.2.5 设 $U\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$，则下述等价

(i) U 是部分等距;

(ii) U^* 是部分等距;

(iii) U^*U 是正交射影;

(iv) UU^* 是正交射影.

当 U 是部分等距时， U^*U 是到 $(\operatorname{Ker}U)^\perp$ 上的正交射影， UU^* 是到 $\operatorname{Ran}U$ 上的正交射影.

证明 首先，对任意 $f\in\mathcal{H}$，总有

$$((1-U^*U)f,f)=(f,f)-(U^*Uf,f)=\|f\|^2-\|Uf\|^2. \tag{2.1}$$

若 U 是部分等距，则对任意 $f\in\mathcal{H}$， $\|Uf\|\le\|f\|$．由上式可见 $1-U^*U\ge0$．从而 $1-U^*U$ 有正平方根 $\sqrt{1-U^*U}$．

设 $f\in(\operatorname{Ker}U)^\perp$，则 $\|Uf\|=\|f\|$．由 (2.1) 式可见

$$\|\sqrt{1-U^*U}f\|^2=(\sqrt{1-U^*U}f,\sqrt{1-U^*U}f)=((1-U^*U)f,f)=0.$$

于是 $\sqrt{1-U^*U}f=0$，从而 $(1-U^*U)f=0$，即 $U^*Uf=f$．而对 $g\in\operatorname{Ker}U$，有 $U^*Ug=0$．故 U^*U 是到 $(\operatorname{Ker}U)^\perp$ 的射影．又 U^*U 是自伴的，故 U^*U 是正交射影．这证明了 (i)$\Rightarrow$(iii)．

反之，若 U^*U 是正交射影，对任意 $f\in(\operatorname{Ker}U)^\perp$ 有 $f\in(\operatorname{Ker}U^*U)^\perp$，从而 $U^*Uf=f$．

于是

$$\|Uf\|^2 = (Uf, Uf) = (U^*Uf, f) = (f, f) = \|f\|^2.$$

即 $\|Uf\| = \|f\|$. 所以 U 是部分等距. 这证明了 (iii)⇒(i) .

总之, (i)⇔(iii) . 同理, (ii)⇔(iv) . 剩下只须证明 (iii)⇔(iv) . 又由对称性, 只须证明 (iii)⇒(iv) .

由 U^*U 是到 $(\mathrm{Ker}\,(U^*U))^\perp = (\mathrm{Ker}\,U)^\perp = \overline{\mathrm{Ran}\,U^*}$ 上的射影, 于是 $U^*UU^* = U^*$. 这样 $UU^*UU^* = UU^*$, 即 UU^* 是幂等算子. 显然它是自伴的, 故 UU^* 是正交射影. ◇

定理 IV.2.6 (算子的极分解) 设 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, 则存在唯一的部分等距 U , 使 $A = U|A|$, 且 $\mathrm{Ker}\,U = \mathrm{Ker}\,A$, $\mathrm{Ran}\,U = \overline{\mathrm{Ran}\,A}$.

证明 定义映射 U_0 : $\mathrm{Ran}\,|A| \to \mathrm{Ran}\,A$ 如下:

$$U_0 z = Ax\,, \quad \forall z = |A|x \in \mathrm{Ran}\,|A|\,.$$

若有 $x_1 \in \mathcal{H}$ 使 $|A|x = z = |A|x_1$, 则 $|A|(x - x_1) = 0$, 即 $x - x_1 \in \mathrm{Ker}\,|A|$. 但 $\mathrm{Ker}\,|A| = \mathrm{Ker}\,A$. 于是 $x - x_1 \in \mathrm{Ker}\,A$, 即 $A(x - x_1) = 0$. 于是 $Ax_1 = Ax$. 这样, U_0 的定义是完善的. 易证, 它是线性映射, 而且

$$\begin{aligned} \|U_0 z\|^2 &= \|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (|A|^2 x, x) \\ &= (|A|x, |A|x) = (z, z) = \|z\|^2. \end{aligned}$$

这说明 U_0 是 $\mathrm{Ran}\,|A|$ 到 $\mathrm{Ran}\,A$ 上的等距. 于是可扩张为 $\overline{\mathrm{Ran}\,|A|}$ 到 $\overline{\mathrm{Ran}\,A}$ 上的等距, 记为 U_1 . 对 $x \in \mathcal{H}$, 记 $x = x_1 + x_2$, 其中 $x_1 \in \overline{\mathrm{Ran}\,|A|}$, $x_2 \in \overline{\mathrm{Ran}\,|A|}^\perp = \mathrm{Ker}\,A$, 定义 $Ux = U_1 x_1$. 那么 U 是一个部分等距. 此外,

$$\mathrm{Ker}\,U = \mathrm{Ker}\,A\,,$$

$$\mathrm{Ran}\,U = \overline{\mathrm{Ran}\,A}\,,$$

$$U|A|x = Ax\,, \quad \forall x \in \mathcal{H}\,, \text{ 即 } A = U|A|\,.$$

最后证明唯一性. 假设又有部分等距 $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 使 $A = V|A|$, 且 $\mathrm{Ker}\,V = \mathrm{Ker}\,A$, $\mathrm{Ran}\,V = \overline{\mathrm{Ran}\,A}$. 则对 $z = |A|x \in \mathrm{Ran}\,|A|$ 有

$$Uz = U|A|x = Ax = V|A|x = Vz\,.$$

根据连续性, 对任意 $z \in \overline{\mathrm{Ran}\,|A|}$, $Uz = Vz$. 又 $\mathrm{Ker}\,U = \mathrm{Ker}\,A = \overline{\mathrm{Ran}\,|A|}^\perp = \mathrm{Ker}\,V$. 故对任意 $x \in \mathcal{H}$, 记 $x = x_1 + x_2$, 其中 $x_1 \in \overline{\mathrm{Ran}\,|A|}$, $x_2 \in \overline{\mathrm{Ran}\,|A|}^\perp$, 有 $Ux = Ux_1 = Vx_1 = Vx$. 故 $V = U$. ◇

IV.3 标量值谱测度、谱表示

在 III.2 我们曾引进 C^* 代数概念, 并且指出两个基本的 C^* 代数. 设 X 是紧 Hausdorff 空间, 则 $C(X)$ 是交换的 C^* 代数. 若 $\mathcal{H}$ 是复可分 Hilbert 空间, 则 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是一个不交换的 C^* 代数.

设 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子, $C(\sigma(A))$ 表示 $\sigma(A)$ 上全体连续函数代数. $C(\sigma(A))$ 是 C^* 代数. 用 $\mathcal{C}_A$ 表示由 A 生成的之 C^* 子代数, 即包含 A 和 I 的 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 之最小 C^* 子代数. 我们在 VI.1 已证明 $\mathcal{C}_A$ 与 $C(\sigma(A))$ 是代数 $*-$ 等距同构的, 由此建立自伴算子的谱定理.

设 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子, 给定一个 $\psi \in \mathcal{H}$. 令

$$\ell(f) = (f(A)\psi, \psi), \forall f \in C((\sigma A))\,,$$

这里 $f(A)$ 表示 A 之连续函数演算．显然 ℓ 是 $C(\sigma(A))$ 上线性泛函．若 $f\geq 0$，则 $f(A)\geq 0$．从而 $\ell(f)\geq 0$，即 ℓ 是 $C(\sigma(A))$ 上正线性泛函．根据 Riesz-Markov 定理，存在 $\sigma(A)$ 上唯一的正则正 Borel 测度 μ_ψ 使

$$\ell(f)=\int_{\sigma(A)} f\mathrm{d}\mu_\psi,\ \forall f\in C(\sigma(A))\ .$$

即

$$(f(A)\psi,\psi)=\int_{\sigma(A)} f\mathrm{d}\mu_\psi,\ \forall f\in C(\sigma(A))\ .$$

取 $f\equiv 1$，得

$$\|\psi\|^2=(\psi,\psi)=\int_{\sigma(A)} 1\mathrm{d}\mu_\psi=\mu_\psi(\sigma(A))=\|\mu_\psi\|\ .$$

定义 IV.3.1 测度 μ_ψ 称为 A 与 ψ 相关联的谱测度．有时记 μ_ψ 为 $\mu_{<A,\psi>}$，以表明它是 A 之谱测度．

由 Riesz-Markov 定理我们知道 μ_ψ 可看作 $[C(\sigma(A))]^*$ 中的元．于是下面的弱 * 拓扑有意义．

设 ψ_n， $\psi\in\mathcal{H}$，且 $\|\psi_n-\psi\|\to 0$，当 $n\to\infty$．则 $\mu_{\psi_n}\to\mu_\psi$ (按弱 * 拓扑)．

事实上，对任何 $f\in C(\sigma(A))$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\sigma(A)} f\mathrm{d}\mu_{\psi_n}-\int_{\sigma(A)} f\mathrm{d}\mu_\psi\right|\\
=\ &|(f(A)\psi_n,\psi_n)-(f(A)\psi,\psi)|\\
\leq\ &|(f(A)\psi_n,\psi_n)-(f(A)\psi,\psi_n)|+|(f(A)\psi,\psi_n)-(f(A)\psi,\psi)|\\
\leq\ &\|f(A)(\psi_n-\psi)\|\|\psi_n\|+\|f(A)\psi\|\|\psi_n-\psi\|\\
\leq\ &\|f(A)\|\|\psi_n-\psi\|\|\psi_n\|+\|f(A)\|\|\psi\|\|\psi_n-\psi\|\\
\leq\ &\|f(A)\|(\|\psi_n\|+\|\psi\|)\|\psi_n-\psi\|\to 0, n\to\infty.
\end{aligned}$$

设 $\mathcal{H}_1$ 是另一 Hilbert 空间，$A_1\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$．若存在酉算子 U：$\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}$，使 $A_1=U^{-1}AU$，则称 A_1 酉等价于 A 记作 $A_1\cong A$．显然，此时有下述成立．

(1) $\sigma(A_1)=\sigma(A)$；

(2) 对任意多项式中 p， $p(A_1)=U^{-1}p(A)U$，因而 $p(A_1)\cong p(A)$；

(3) A 自伴当且仅当 A_1 自伴;

(4) 若 A 自伴，对任意 $f\in C(\sigma(A))$， $f(A_1)$ 与 $f(A)$ 酉等价且 $f(A_1)=U^{-1}f(A)U$．

命题 IV.3.1 设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$， $A_1\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ 皆自伴算子，且 $A\cong A_1$，则对每个 $\psi\in\mathcal{H}$，

$$\mu_{<A,\psi>}=\mu_{<A_1,U\psi>}\ ,$$

其中 $U:\mathcal{H}\to\mathcal{H}_1$ 是酉算子使 $A=U^{-1}A_1U$．

证明 记 $X=\sigma(A)=\sigma(A_1)$． $\forall f\in C(X)$，有

$$\begin{aligned}
\int_X f\mathrm{d}\mu_{<A,\psi>}\ &=\ (f(A)\psi,\psi)=(U^{-1}f(A_1)U\psi,\psi)\\
&=\ (f(A_1)U\psi,U\psi)=\int_X f\mathrm{d}\mu_{<A_1,U\psi>}.
\end{aligned}$$

根据 Riesz-Markov 定理中唯一性论断，必有 $\mu_{<A,\psi>}=\mu_{<A_1,U\psi>}$． ◇

设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴的， M 是 A 之不变子空间，则 $A_1=A|_M$ 是 M 上自伴算子．容易证明， $\forall f\in C(\sigma(A))$， M 也是 $f(A)$ 之不变子空间，且 $f(A_1)=f(A)|_M$．事实上，存在多项式序列 $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ 使 $\|p_n-f\|_\infty\to 0$，当 $n\to\infty$．于是

$$\lim_{n\to\infty}\|p_n(A)-f(A)\|=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|p_n(A_1)-f(A_1)\|=0\ .$$

注意 M 是 $p_n(A)$ 之不变子空间且

$$p_n(A_1) = p_n(A)|_M\ ,\quad n = 1,\ 2\ ,\ \cdots .$$

令 $n \to \infty$ ，即得 $f(A_1) = f(A)|_M$.

命题 IV.3.2 *设 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴的， M, N 是 A 之不变子空间，且 $M \perp N$ ，则对任何 $\psi_1 \in M$ ， $\psi_2 \in N$ ，必有*

$$\mu_{<A,\psi_1+\psi_2>} = \mu_{<A,\psi_1>} + \mu_{<A,\psi_2>}\ .$$

证明 设 $f \in C(\sigma(A))$. 由前述 $M,\ N$ 亦是 $f(A)$ 之不变子空间. 对 $\psi_1 \in M,\ \psi_2 \in N$ ，必有 $f(A)\psi_1 \in M$ ， $f(A)\psi_2 \in N$. 于是由 $M \perp N$ 有

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(A)} f\mathrm{d}\mu_{<A,\psi_1+\psi_2>} &= (f(A)(\psi_1+\psi_2), \psi_1+\psi_2) \\
&= (f(A)\psi_1, \psi_1) + (f(A)\psi_2, \psi_2) \\
&= \int_{\sigma(A)} f\mathrm{d}\mu_{<A,\psi_1>} + \int_{\sigma(A)} f\mathrm{d}\mu_{<A,\psi_2>} \\
&= \int_{\sigma(A)} f\mathrm{d}[\mu_{<A,\psi_1>} + \mu_{<A,\psi_2>}].
\end{aligned}$$

由 $\mu_{<A,\psi_1+\psi_2>}$ ， $\mu_{<A,\psi_1>} + \mu_{<A,\psi_2>}$ 都是正则正 Borel 测度，根据 Riesz-Markov 定理，必有

$$\mu_{<A,\psi_1+\psi_2>} = \mu_{<A,\psi_1>} + \mu_{<A,\psi_2>}\ . \qquad \diamond$$

注 根据归纳法，对 A 之两两正交的不变子空间 $M_j,\ \psi_j \in M_j,\ j = 1, \cdots, n$ ，必有

$$\mu_{<A,\sum\limits_{j=1}^{n}\psi_j>} = \sum_{j=1}^{n} \mu_{<A,\psi_j>}\ .$$

这可以进一步推广到可数个两两正交不变子空间情形.

推论 IV.3.3 *设 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴的， $M_n,\ n = 1, 2, \cdots$ ，是 A 之不变子空间，两两正交. 若 $\psi_n \in M_n$ ， $n = 1, 2, \cdots$ ，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n$ 按范数收敛于 ψ ，则*

$$\mu_{<A,\psi>} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{<A,\psi_n>}\ ,$$

右端级数按测度空间范数收敛.

证明 由命题 IV.3.2 下注，及谱测度定义

$$\|\sum_{j=n}^{n+m} \mu_{<A,\psi_j>}\| = \|\mu_{<A,\sum\limits_{j=n}^{n+m}\psi_j>}\| = \|\sum_{j=n}^{n+m} \psi_j\|^2 = \sum_{j=n}^{n+m} \|\psi_j\|^2 \to 0\ ,$$

$n \to \infty$. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_{<A,\psi_j>}$ 按测度范数收敛. 又

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{j=1}^{n} \mu_{<A,\psi_j>} - \mu_{<A,\psi>}\| = \|\mu_{<A,\sum\limits_{j=1}^{n}\psi_j>} - \mu_{<A,\psi>}\| \\
= \ &\|\mu_{<A,\psi-\sum\limits_{j=1}^{n}\psi_j>}\| = \|\psi - \sum_{j=1}^{n} \psi_j\|^2 \to 0, n \to \infty.
\end{aligned}$$

故 $\mu_{<A,\psi>} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_{<A,\psi_j>}$. $\diamond$

设 X 是 $\mathbb{R}$ 紧子集， μ 是 X 上正则正 Borel 测度. $L^2(X,\mu)$ 表示 X 上全体 μ- 平方可积函数集合，按内积

$$(\varphi, \psi) = \int_X \varphi(x)\bar{\psi}(x)\mathrm{d}\mu, \varphi, \psi \in L^2(X,\mu)$$

形成的 Hilbert 空间.

设 f 是 X 上复值 μ 可测函数，令

$$\|f\|_\infty \triangleq \mathrm{esssup}\,|f| \triangleq \inf_{\mu(E)=0} \sup_{x\in X\setminus E} |f(x)| ,$$

称为 f 的 μ-<u>本性上确界</u>．若 $\|f\|_\infty < +\infty$，称 f 是 μ-<u>本性有界的</u>．全体 μ- 本性有界可测函数，记为 $L^\infty(X,\mu)$，按 $\|\cdot\|_\infty$ 成为 C^* 代数.

设 $f \in L^\infty(X,\mu)$，复数集

$$\{\xi \in \mathbb{C}; \mu\{x\in X; |f(x)-\xi| < \varepsilon\} > 0, \forall \varepsilon > 0\}$$

称为 f 之 μ-<u>本性值域</u>，记为 $\mathrm{essRan}\, f$．

注意， f 之本性值域与 f 之支集是不同概念．一般来说，本性值域和值域也不同，它们可以互不包含.

设 $f \in L^\infty(X,\mu)$，定义 $L^2(X,\mu)$ 上线性算子 M_f 如下：

$$(M_f\varphi)(x) = f(x)\varphi(x) , \quad \forall x \in X , \quad \varphi \in L^2(X,\mu) .$$

可以证明 M_f 是有界的，而且 $\|M_f\| = \|f\|_\infty$．事实上，

$$\|M_f\varphi\|^2 = \int_X |f(x)\varphi(x)|^2 \mathrm{d}\mu \le \|f\|_\infty^2 \int_X |\varphi(x)|^2 \mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty^2 \|\varphi\|^2, \ \forall\, \varphi \in L^2(X,\mu).$$

可见 $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$. 另一方面，$\forall \varepsilon > 0$, 令 $E_\varepsilon = \{x\in X : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$, 则 $\mu(E_\varepsilon) > 0$. 取 $\varphi_\varepsilon = \frac{\chi_{E_\varepsilon}}{\sqrt{\mu(E_\varepsilon)}}$，则

$$\|\varphi_\varepsilon\|^2 = \textstyle\int_X |\varphi_\varepsilon(x)|^2 \mathrm{d}\mu = \int_{E_\epsilon} \frac{1}{\mu(E_\varepsilon)} \mathrm{d}\mu = 1 .$$

从而

$$\|M_f\|^2 \ge \|M_f\varphi_\varepsilon\|^2 = \int_{E_\varepsilon} \frac{|f(x)|^2}{\mu(E_\varepsilon)} \mathrm{d}\mu \ge \frac{(\|f\|_\infty - \varepsilon)^2}{\mu(E_\varepsilon)} \int_{E_\varepsilon} \mathrm{d}\mu = (\|f\|_\infty - \varepsilon)^2.$$

由 $\varepsilon > 0$ 是任意的，故 $\|M_f\| \ge \|f\|_\infty$．

通常称如上定义的有界算子 M_f 为 $L^2(X,\mu)$ 上以 f 为符号的 <u>乘法算子</u>，或 $L^2(X,\mu)$ 上乘以 f 之乘法算子．关于 M_f 总有下面定理成立.

定理 IV.3.4 $\sigma(M_f) = \mathrm{essRan}\, f$．

证明 设 $\xi \in \mathrm{essRan}\, f$. 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 令 $E_n = \{x \in X : |f(x)-\xi| < \frac{1}{n}\}$, 则 $\mu(E_n) > 0$. 令 $\varphi_n = \frac{\chi_{E_n}}{\sqrt{\mu(E_n)}}$．易证 $\|\varphi_n\| = 1$．而

$$\begin{aligned}\|(M_f - \xi I)\varphi_n\|^2 &= \int_X |(f(x)-\xi)\varphi_n(x)|^2 \mathrm{d}\mu = \int_{E_n} \frac{|(f(x)-\xi)^2}{\mu(E_n)} \mathrm{d}\mu \\ &\le \frac{1}{n^2\mu(E_n)} \int_{E_n} \mathrm{d}\mu = \frac{1}{n^2} \to 0, n\to\infty.\end{aligned}$$

可见 $\xi \in \sigma(M_f)$．

另一方面，设 $\xi \notin \mathrm{essRan}\, f$，存在 $\epsilon_0 > 0$，使

$$\mu\{x\in X; |f(x)-\xi| < \epsilon_0\} = 0 .$$

从而 $|f(x)-\xi| \ge \epsilon_0, [\mu]$ a. e. 于X．令 $g(x) = \frac{1}{f(x)-\xi}$， $x \in X$，则 $g \in L^\infty(X,\mu)$．于是 M_g 是 $L^2(X,\mu)$ 上有界线性算子．易见

$$M_g(M_f - \xi I) = (M_f - \xi I)M_g = I .$$

故 $\xi \notin \sigma(M_f)$． ◇

推论 IV.3.5 设 M_x 是 $L^2(X,\mu)$ 上乘以自变量的乘法算子，则 $\sigma(M_x)=\operatorname{supp}\mu$.

证明 令 $f(x)=x$ ， $\forall x\in X$. 往证 $\operatorname{essRan} f=\operatorname{supp}\mu$.

设 $\xi\notin\operatorname{essRan} f$ ，则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $\mu(\{x\in X:|f(x)-\xi|<\varepsilon_0\})=0$ ，即

$$\mu(\{x\in X:|x-\xi|<\varepsilon_0\})=0 .$$

而 $\{x\in X:|x-\xi|<\varepsilon_0\}$ 是 ξ 的一个开邻域，故 $\xi\notin\operatorname{supp}\mu$.

若 $\xi\notin\operatorname{supp}\mu$ ，则存在开集 G ，使 $\xi\in G$ 且 $\mu(G)=0$. 于是存在 $\varepsilon_0>0$ 使

$$\{x\in X:|x-\xi|<\varepsilon_0\}\subset G .$$

因而 $\mu(\{x\in X:|f(x)-\xi|<\varepsilon_0\})=\mu(\{x\in X:|x-\xi|<\varepsilon\})=0$. 故 $\xi\notin\operatorname{essRan} f$. 总之，$\operatorname{essRan} f=\operatorname{supp}\mu$. 根据定理 IV.3.4 ,

$$\sigma(M_x)=\operatorname{essRan} f=\operatorname{supp}\mu .$$

◇

定义 IV.3.2 设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ， $\varphi_0\in\mathcal{H}$ ，子空间 $\bigvee\{A^n\varphi_0:n=0,1\,2,\cdots\}$ 称为 φ_0 生成的 A 之<u>循环子空间</u>. 如果 $\bigvee\{A^n\varphi_0:n=0,1\,2,\cdots\}=\mathcal{H}$ ，则称 φ_0 为 A 之<u>循环向量</u>.

并非每个算子都有循环向量，例如恒等算子 I 就没有循环向量；而 l^2 上单边移位算子 S 有循环向量 $e_0=\{1,0,0,\cdots\}$.

引理 IV.3.6 设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子，有循环向量 φ_0 ，则 A 酉等价于 $L^2(\sigma(A),\mu_{\varphi_0})$ 上乘以自变量的乘法算子 M_x .

证明 设 $X=\sigma(A)$ ， $\mu=\mu_{\varphi_0}$. 由 Stone-Weierstrass 定理，多项式全体 $\mathcal{P}$ 在 $C(X)$ 中稠密. 从而 $\mathcal{P}$ 亦在 $L^2(X,\mu)$ 中稠密. 定义 $\mathcal{P}\subset L^2(X,\mu)$ 到 $\mathcal{H}$ 中的线性算子 U_0 如下:

$$U_0p=p(A)\varphi_0 ,\quad \forall p\in\mathcal{P} .$$

注意，

$$\begin{aligned}\|U_0p\|^2 &= \|p(A)\varphi_0\|^2=(p(A)\varphi_0,p(A)\varphi_0)=(p(A)^*p(A)\varphi_0,\varphi_0)\\ &= (\overline{p}(A)p(A)\varphi_0,\varphi_0)=(|p|^2(A)\varphi_0,\varphi_0)=\int_X|p|^2\mathrm{d}\mu_{\varphi_0}=\|p\|^2.\end{aligned}$$

右端 $\|p\|$ 是 p 作为 $L^2(X,\mu)$ 元之范数. 可见 U_0 是一个等距映射. 因 $\mathcal{P}$ 按 $L^2(X,\mu)$ 范数在 $L^2(X,\mu)$ 中稠密，而 $\{p(A)\varphi_0:p\in\mathcal{P}\}$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，所以 U_0 连续扩张为 $L^2(X,\mu)$ 到 $\mathcal{H}$ 上的等距线性算子，记为 U . 即 $U:L^2(X,\mu)\to\mathcal{H}$ 是酉算子. 对 $p\in\mathcal{P}$,

$$U^{-1}AUp=U^{-1}Ap(A)\varphi_0=U^{-1}((xp)(A))\varphi_0=U^{-1}U(xp)=xp=M_xp .$$

由 $\mathcal{P}$ 在 $L^2(X,\mu)$ 中稠密，于是根据连续性，对任何 $f\in L^2(X,\mu)$ 有

$$U^{-1}AUf=M_xf .$$

故 $U^{-1}AU=M_x$. ◇

定理 IV.3.7 设 $\mathcal{H}$ 是可分无穷维 Hilbert 空间，$A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子，则存在 $X=\sigma(A)$ 之闭子集 X_n 及其上正则正 Borel 测度 μ_n ， $n=1,2,\cdots,N$ (N 是自然数或可数无穷)，以及酉算子 $U:\mathcal{H}\to\bigoplus\limits_{n=1}^{N}L^2(X_n,\mu_n)$ 使 $A=U^{-1}M_\eta U$ ，这里

$$M_\eta=\bigoplus_{n=1}^{N}M_{\eta_n}=\begin{bmatrix}M_{\eta_1}&&\\&\ddots&\\&&M_{\eta_N}\end{bmatrix}$$

每个 M_{η_n} 都是 $L^2(X_n,\mu_n)$ 上乘以自变量的乘法算子.

证明 若 A 有循环向量，由引理 IV.3.6 可见结论成立，此时 $N=1$ ， $X_1=X$. 下面考虑一般情形.

$\forall\varphi\in\mathcal{H},\ \varphi\neq 0$，令 $\mathcal{H}_\varphi=\bigvee\{A^n\varphi:,n=0,1,2,\cdots\}$ 表示由 φ 生成的 A 之循环子空间，则 $\mathcal{H}_\varphi$ 是 A 之不变子空间，因而 $\mathcal{H}_\varphi$ 约化 A．此外， $A|_{\mathcal{H}_\varphi}$ 是自伴的， $\varphi\in\mathcal{H}_\varphi$ 是 $A|_{\mathcal{H}_\varphi}$ 的循环向量，而且 $\sigma(A|_{\mathcal{H}_\varphi})\subset\sigma(A)=X$．令

$$\mathcal{OCS}=\{\{\mathcal{H}_{\varphi_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}:\Lambda\text{有限或可数，对}\Lambda\text{中不同的}\lambda\text{和}\lambda',\ \mathcal{H}_{\varphi_\lambda}\perp\mathcal{H}_{\varphi'_\lambda}\}\ .$$

记 $\{\mathcal{H}_{\varphi_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda_1}\leq\{\mathcal{H}_{\varphi_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda_2}$，如果 $\Lambda_1\subset\Lambda_2$．这样， $\mathcal{OCS}$ 是一个部分序集. 如果 $\mathcal{S}\subset\mathcal{OCS}$ 是一个全序子集，令 $\widetilde{\Lambda}=\bigcup_{\{\mathcal{H}_{\varphi_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}\in\mathcal{S}}\Lambda$．对 $\widetilde{\Lambda}$ 中不同的 λ_1 和 λ_2，存在 Λ_1 和 Λ_2 使得 $\lambda_1\in\Lambda_1$，$\lambda_2\in\Lambda_2$，而且 $\{\mathcal{H}_{\varphi_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda_1},\ \{\mathcal{H}_{\varphi_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda_2}\in\mathcal{S}$．由于 $\mathcal{S}$ 是全序的，不妨设 $\Lambda_1\subset\Lambda_2$．这样，$\lambda_1,\ \lambda_2\in\Lambda_2$， $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $\mathcal{H}_{\varphi_{\lambda_1}}\perp\mathcal{H}_{\varphi_{\lambda_2}}$．亦即对 $\widetilde{\Lambda}$ 中不同的 λ 和 λ'， $\mathcal{H}_{\varphi_\lambda}\perp\mathcal{H}_{\varphi_{\lambda'}}$．又由于 $\mathcal{H}$ 是可分的， $\widetilde{\Lambda}$ 至多可数. 故 $\{\mathcal{H}_{\varphi_\lambda}\}_{\lambda\in\widetilde{\Lambda}}\in\mathcal{OCS}$．这样， $\mathcal{OCS}$ 的每个全序子集都有上界. 根据 Zorn 引理， $\mathcal{OCS}$ 有极大元. 设 $\{\mathcal{H}_{\varphi_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个极大元，则 Λ 有限或可数，记为 $\{1,2,\cdots,N\}$．

断言 $M\triangleq\mathop{\oplus}\limits_{n=1}^{N}\mathcal{H}_{\varphi_n}=\mathcal{H}$．

若不然，取 $\varphi_0\in\mathcal{H}\ominus M$， $\varphi_0\neq 0$．那么 $\mathcal{H}_{\varphi_0}\perp\mathcal{H}_{\varphi_n}$， $\forall 1\leq n\leq N$．令 $\Lambda_1=\{0\}\cup\Lambda$．则 $\{\mathcal{H}_{\varphi_j}:j\in\Lambda_1\}\in\mathcal{OCS}$，且 $\{\mathcal{H}_{\varphi_j}\}_{j\in\Lambda}<\{\mathcal{H}_{\varphi_j}\}_{j\in\Lambda_1}$．这矛盾于 $\{\mathcal{H}_{\varphi_j}\}_{j\in\Lambda}$ 是极大元. 故 $\mathcal{H}=\mathop{\oplus}\limits_{n=1}^{N}\mathcal{H}_{\varphi_n}$．

记 $A_n=A|_{\mathcal{H}_{\varphi_n}}$， $n=1,2,\cdots,N$．那么 A_n 是自伴算子，且 $A=\mathop{\oplus}\limits_{n=1}^{N}A_n$．注意到，$\mu_n\triangleq\mu_{<A,\varphi_n>}=\mu_{<A_n,\varphi_n>}$．于是 $\operatorname{supp}\mu_n=\sigma(A_n)$．记 $X_n=\sigma(A_n)$．因为 φ_n 是 A_n 之循环向量，根据引理 IV.3.6，存在酉算子 $U_n:\mathcal{H}_{\varphi_n}\to L^2(X_n,\mu_n)$ 使得

$$A_n=U_n^{-1}M_{\eta_n}U_n\ ,$$

这里， M_{η_n} 是 $L^2(X_n,\mu_n)$ 上乘以自变量的乘法算子. 令 $U=\mathop{\oplus}\limits_{n=1}^{N}U_n$， $M_\eta=\mathop{\oplus}\limits_{n=1}^{N}M_{\eta_n}$．那么 U 是 $\mathcal{H}$ 到 $\mathop{\oplus}\limits_{n=1}^{N}L^2(X_n,\mu_n)$ 上的酉算子，且 $A=U^{-1}M_\eta U$． ◇

命题 IV.3.8 *在定理 IV.3.7 中，* $X=\overline{\bigcup_{n=1}^{N}X_n}$．

证明 留作练习题. ◇

在定理 IV.3.7 中，可取 φ_n， $n=1,2,\cdots,N$，满足 $\sum\limits_{n=1}^{N}\|\varphi_n\|^2<+\infty$．令 $\varphi_0=\sum\limits_{n=1}^{N}\varphi_n$．根据推论 IV.3.3，有

$$\mu_{\varphi_0}=\sum_{n=1}^{N}\mu_{\varphi_n} \tag{3.1}$$

μ_{φ_0} 是 X 上正则正 Borel 测度，而且

$$\mu_{\varphi_0}(X)=\sum_{n=1}^{N}\mu_{\varphi_n}(X)=\sum_{n=1}^{N}\mu_{\varphi_n}(X_n)=\sum_{n=1}^{N}\|\varphi_n\|^2<+\infty\ .$$

定义 IV.3.3 *定理 IV.3.7 中之* $\{\mu_n\}_{n=1}^{N}$ *称为* A *之谱测度族，而由 (3.1) 确定的* μ_{φ_0} *称为* A *之标量值谱测度，记为* μ．

μ 是 X 上有限的正则正 Borel 测度， $\mu(X)=\sum\limits_{n=1}^{N}\|\varphi_n\|^2<+\infty$，而且 $\operatorname{supp}\mu=X$．事实上，由推论 IV.3.5， $\operatorname{supp}\mu_n=X_n$， $n=1,2,\cdots,N$．由命题 IV.3.8，

$$\operatorname{supp}\mu=\overline{\bigcup_{n=1}^{N}\operatorname{supp}\mu_n}=\overline{\bigcup_{n=1}^{N}X_n}=X\ .$$

推论 IV.3.9 (自伴算子谱表示定理) 设 $\mathcal{H}$ 是可分 Hilbert 空间， $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子，则存在局部紧的度量空间 X 及其上有限的正则正 Borel 测度 μ，以及有界 Borel 函数 η，使得 A 酉等价于 $L^2(X,\mu)$ 上乘法算子 M_μ .

证明 由定理 IV.3.7， A 酉等价于 $\overset{N}{\underset{n=1}{\oplus}} L^2(X_n,\mu_n)$ 上算子 $\overset{N}{\underset{n=1}{\oplus}} M_{\eta_n}$ ，其中 X_n 是 $\sigma(A)\subset[-\|A\|,\|A\|]$ 的紧子集， $\mu_n=\mu_{<A,\varphi_n>}$ 是 A 之与某向量 φ_n 相关联的谱测度，而且 $\sum\limits_{n=1}^{N}\|\mu_n\|=\sum\limits_{n=1}^{N}\|\varphi_n\|^2<+\infty$， M_{η_n} 是 $L^2(X_n,\mu_n)$ 上乘以自变量的乘法算子. 视 X_n，$n=1,2,\cdots,N$，为不同直线上的集合，即将它们视为两两不交的 (见例 I.4.1). 令 $X=\overset{N}{\underset{n=1}{\cup}} X_n$，即 X 为 $\{X_n\}_{n=1}^N$ 的不交并. 对 $x,\ y\in X$，定义

$$\rho(x,y)=\begin{cases}|x-y|, & \text{当 } x \text{ 与 } y \text{ 属于同一个 } X_n\text{，}\\ \|A\|, & \text{当 } x \text{ 与 } y \text{ 属于不同的 } X_n\text{ .}\end{cases}$$

可以验证 $\rho(\cdot,\cdot)$ 是 X 上一个距离，而且它使 X 成为一个局部紧的度量空间. 不难证明，$G\subset X$ 是开集当且仅当对每个 n， $G\cap X_n$ 都是直线中开集. 因此， $E\subset X$ 是 Borel 集当且仅当对每个 n， $E\cap X_n$ 都是直线中 Borel 集. 对 X 中 Borel 集 E，记 $E_n=E\cap X$， $n=1,2,\cdots,N$，那么， $E=\overset{N}{\underset{n=1}{\cup}} E_n$；定义

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{N}\mu_n(E_n)\ .$$

容易验证 μ 是 X 上正则正 Borel 测度，而且是有限的. 事实上，

$$\mu(X)=\sum_{n=1}^{N}\mu_n(X_n)=\sum_{n=1}^{N}\|\mu_n\|<+\infty\ .$$

下面我们定义 X 上一个函数 η . 对每个 $x\in X$，唯一存在一个 n 使得 $x\in X_n$，令 $\eta(x)=\eta_n(x)$. 这样 η 是 X 上函数，而且

$$\|\eta\|_\infty=\mathrm{esssup}|\eta|\le\sup_n\{\mathrm{esssup}|\eta_n|\}\le\sup_n\|M_{\eta_n}\|=\|A\|<+\infty\ .$$

因而 η 是有界的. 此外，对 X 中每个 Borel 集 E， $E_n=X_n\cap E$ 是 X_n 中 Borel 集，故而 $\eta_n^{-1}(E_n)$ 是 X_n 中 Borel 集. 因此， $\eta^{-1}(E)=\overset{N}{\underset{n=1}{\cup}}\eta_n^{-1}(E_n)$ 是 X 中 Borel 集. 所以 η 是 X 上一个 Borel 函数.

对 $f\in L^2(X,\mu)$，记 $f_n=f|_{X_n}$. 那么 $\int_{X_n}|f_n|^2\mathrm{d}\mu_n\le\int_X|f|^2\mathrm{d}\mu<+\infty$. 故 $f_n\in L^2(X_n,\mu_n)$. 此外，

$$\sum_{n=1}^{N}\|f_n\|^2=\sum_{n=1}^{N}\int_{X_n}|f_n|^2\mathrm{d}\mu_n=\int_X|f|^2\mathrm{d}\mu=\|f\|^2<+\infty\ .$$

故 $\overset{N}{\underset{n=1}{\oplus}} f_n\in\overset{N}{\underset{n=1}{\oplus}} L^2(X_n,\mu_n)$. 定义

$$Uf=\overset{N}{\underset{n=1}{\oplus}} f_n\ .$$

易见，$U:\ L^2(X,\mu)\to\overset{N}{\underset{n=1}{\oplus}} L^2(X_n,\mu_n)$，是等距线性算子. 另一方面，对 $\overset{N}{\underset{n=1}{\oplus}} g_n\in\overset{N}{\underset{n+1}{\oplus}} L^2(X_n,\mu_n)$，定义 X 上函数 g 如下：对每个 $x\in X$，唯一存在一个 n 使得 $x\in X_n$，记 $g(x)=g_n(x)$. 那么 g 是 X 上 Borel 函数，而且

$$\int_X|g|^2\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{N}\int_{X_n}|g_n|^2\mathrm{d}\mu_n=\|\overset{N}{\underset{n=1}{\oplus}} g_n\|^2<+\infty\ .$$

故 $g\in L^2(X,\mu)$，且 $Ug=\overset{N}{\underset{n=1}{\oplus}} g_n$. 因此， U 是一个酉算子. 不难验证

$$M_\eta = U^*(\overset{N}{\underset{n=1}{\oplus}} M_{\eta_n})U\ .$$

故 A 酉等价与 $L^2(X,\mu)$ 上乘法算子 M_η . ◇

推论 IV.3.10 设 $\mathcal{H}$ 是可分的 Hilbert 空间， $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴的， μ 是 A 之标量值谱测度，则 $\sigma_p(A)=\mu$ 之纯点集.

证明 由定理 IV.3.7，不妨设 $\mathcal{H}=\overset{N}{\underset{n=1}{\oplus}} L^2(X_n,\mu_n)$， $A=\overset{N}{\underset{n=1}{\oplus}} M_{\eta_n}$，其中 $\eta_n(x)=x$， $\forall x\in X_n$， $n=1,2,\cdots,N$，而且 $\mu=\sum\limits_{n=1}^N \mu_n$.

如果 λ_0 属于 μ 之纯点集, 则 $\mu(\{\lambda_0\})>0$, 即 $\sum\limits_{n=1}^N \mu_n(\{\lambda_0\})>0$. 故存在 n_0 使 $\mu_{n_0}(\{\lambda_0\})>0$. 令

$$\varphi_{n_0}(x)=\begin{cases}1/\sqrt{\mu_{n_0}(\{\lambda_0\})}, & \text{当 } x=\lambda_0\\ 0 & \text{别处.}\end{cases}$$

那么 $\varphi_{n_0}\in L^2(X_{n_0},\mu_{n_0})$，且 $\|\varphi_{n_0}\|=1$. 注意

$$[(M_{\eta_{n_0}}-\lambda_0)\varphi_{n_0}](x)=(x-\lambda_0)\varphi_{n_0}(x)=0$$

故 $\lambda_0\in\sigma_p(M_{\eta_{n_0}})\subset\sigma_p(A)$.

反之，若 $\lambda_0\in\sigma_p(A)$，由于 $\sigma_p(A)=\overset{N}{\underset{n=1}{\cup}}\sigma_p(M_{\eta_n})$，必存在 n_0 使 $\lambda_0\in\sigma_p(M_{\eta_{n_0}})$. 于是存在 $\varphi_{n_0}\in L^2(X_{n_0},\mu_{n_0})$， $\|\varphi_{n_0}\|=1$，使 $(M_{\eta_{n_0}}-\lambda_0)\varphi_{n_0}=0$. 亦即

$$(x-\lambda_0)\varphi_{n_0}(x)=0\ ,\quad [\mu_{n_0}]\ \text{a.e. 于 } X_{n_0}\ .$$

这样， $\mu_{n_0}(\{x\in X_{n_0}: x\neq\lambda_0,\ \varphi_{n_0}(x)\neq 0\})=0$. 于是

$$1=\|\varphi_{n_0}\|^2=\int_{X_{n_0}}|\varphi_{n_0}(x)|^2\mathrm{d}\mu_{n_0}=\int_{\{\lambda_0\}}|\varphi_{n_0}(x)|^2\mathrm{d}\mu_{n_0}=|\varphi_{n_0}|^2\mu_{n_0}(\{\lambda_0\})\ .$$

可见， $\mu_{n_0}(\{\lambda_0\})\neq 0$. 故 $\mu(\{\lambda_0\})>0$. 亦即 λ_0 属于 μ 之纯点集. ◇

IV.4 Borel 函数演算

定理 IV.4.1 设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子， μ 是 A 之标量值谱测度，则对任何 $\psi\in\mathcal{H}$，总有 $\mu_\psi\ll\mu$.

证明 由定理 IV.3.7，存在 A 之两两正交的不变子空间 $M_n,\ n=1,2,\cdots,N$，使 $\mathcal{H}=\oplus_{n=1}^N M_n$. 每个 $A|_{M_n}$ 都有循环向量 φ_n，使 $\sum\limits_{n=1}^N\|\varphi_n\|^2<+\infty$，而且 $\mu=\sum\limits_{n=1}^N\mu_{\varphi_n}$. $\forall\psi\in\mathcal{H}$，有直交分解 $\psi=\oplus_{n=1}^N\psi_n,\ \psi_n\in M_n, n=1,\cdots,N,\ \|\psi\|^2=\sum\limits_{n=1}^N\|\varphi_n\|^2$. 由推论 IV.3.3，

$$\mu_\psi=\sum_{n=1}^N\mu_{\psi_n}\ .$$

于是为证 $\mu_\psi\ll\mu$，只须证 $\mu_{\psi_n}\ll\mu_{\varphi_n}, n=1,\cdots,N$.

由引理 IV.3.6， $A|_{M_n}$ 酉等价于 $L^2(X_n,\mu_{\varphi_n})$ 上乘法算子 M_x . 因此不妨设 $A|_{M_n}$ 就是 $L^2(X_n,\mu_{\varphi_n})$ 上乘法算子 M_x，对任何 $\psi\in L^2(X_n,\mu_{\psi_n})$ 往证 $\mu_\varphi\ll\mu$.

注意, $\mu_\psi+\mu_{\varphi_n}$ 是 X_n 上正则正 Borel 测度, 于是对 X_n 上任何有界 Borel 函数 g , 存在一串 $f_k\in C(X_n)$, 使 $\|f_k\|_\infty\le\|g\|_\infty$. 而且 $\int_{X_n}|f_k(x)-g(x)|\mathrm{d}\mu_{\varphi_n}\to 0,\ \int_{X_n}|f_k(x)-g(x)|\mathrm{d}\mu_\psi\to 0$. 由第一个式子可知， f_k 于 X_n 上按测度 μ_{φ_n} 收敛于 g，又

$$|f_k(x)|\,|\psi(x)|^2\le\|g\|_\infty|\psi(x)|^2, x\in X_n\ .$$

而 $|\psi(x)|^2$ 可积，由 Lebesgue 控制收敛定理， $\int_{X_n} f_k(x)\,|\psi(x)|^2 \mathrm{d}\mu_{\varphi_n} \to \int_{X_n} g(x)|\psi(x)|^2 \mathrm{d}\mu_{\varphi_n}$.
而对 $f_k \in C(X_n)$ ，由 μ_ψ 定义

$$\int_{X_n} f_k \mathrm{d}\mu_\psi = (f_k(A)\psi,\psi) = (f_k\psi,\psi) = \int_{X_n} f_k(x)\,|\psi(x)|^2 \mathrm{d}\mu_{\varphi_n}\ .$$

令 $k\to\infty$ 可得 $\int_{X_n} g \mathrm{d}\mu_\psi = \int_{X_n} g(x)|\psi(x)|^2 \mathrm{d}\mu_{\varphi_n}$. 特别，对 Borel 集合 E ，取 $g = \mathcal{X}_E$ ，可见

$$\mu_\psi(E) = \int_{X_n} \mathcal{X}_E \mathrm{d}\mu_\psi = \int_{X_n} \mathcal{X}_E |\psi(x)|^2 \mathrm{d}\mu_{\varphi_n} = \int_E |\psi(x)|^2 \mathrm{d}\mu_{\varphi_n}\ .$$

这说明 $\mu_\psi \ll \mu_{\varphi_n}$. ◇

推论 IV.4.2 设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子， μ 是 A 之标量值谱测度， $\psi\in\mathcal{H}$ ，则对任何 Borel 集 E ， $\mu_\psi(E)=0 \Leftrightarrow \psi(x)=0, [\mu] a.e. 于E$.

推论 IV.4.3 设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子， μ,μ' 都是 A 之标量值谱测度，则 μ 与 μ' 相互绝对连续.

证明 由 μ' 是标量值谱测度，存在 $\varphi'\in\mathcal{H}$ ，使 $\mu'=\mu_{\varphi'}$. 由定理 IV.4.1 ， $\mu_{\varphi'}\ll\mu$ ，即 $\mu'\ll\mu$. 根据对称性， $\mu\ll\mu'$. ◇

设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子， μ 是 A 之标量值谱测度. 用 $\mathcal{B}(\sigma(A))$ 表示 $\sigma(A)$ 上全体 $[\mu]$- 本性有界 Borel 函数集合，按 μ- 本性上确界之范数 $\|\cdot\|_\infty$ 作成赋范代数. 即具有代数运算的线性赋范空间. 下面要对 $f\in\mathcal{B}(\sigma(A))$ 建立函数演算.

回忆第三节，对每个 $\psi\in\mathcal{H}$ ，存在 $\sigma(A)$ 上唯一的正则正 Borel 测度 μ_ψ 使

$$(f(A)\psi,\psi) = \int_{\sigma(A)} f \mathrm{d}\mu_\psi, \forall f\in C(\sigma(A))\ . \tag{4.1}$$

现在对固定的 $f\in C(\sigma(A))$ ，令 ψ 取遍 $\mathcal{H}$ 中元，总有 (4.1) 成立. 这样对任何 $\varphi,\psi\in\mathcal{H}$ ，由极化恒等式，有

$$\begin{aligned}(f(A)\varphi,\psi) &= \tfrac14[(f(A)(\varphi+\psi),\varphi+\psi)-(f(A)(\varphi-\psi),\varphi-\psi)]\\ &\quad+\tfrac{i}{4}[(f(A)(\varphi+i\psi),\varphi+i\psi)-(f(A)(\varphi-i\psi),\varphi-i\psi)]\\ &= \tfrac14[\int_{\sigma(A)} f\mathrm{d}\mu_{\varphi+\psi}-\int_{\sigma(A)} f\mathrm{d}\mu_{\varphi-\psi}]\\ &\quad+\tfrac{i}{4}[\int_{\sigma(A)} f\mathrm{d}\mu_{\varphi+i\psi}-\int_{\sigma(A)} f\mathrm{d}\mu_{\varphi-i\psi}]\end{aligned} \tag{4.2}$$

注意，这个等式是对所有连续函数得到的. 等式左端是 $\mathcal{H}$ 上有界共轭双线性泛函，而等式右端只需 f 是本性有界 Borel 函数就有意义. 于是启发我们给出如下定义.

对 $g\in\mathcal{B}(\sigma(A))$ ，令

$$B(\varphi,\psi) = \tfrac14[\int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi+\psi}-\int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi-\psi}]+\tfrac{i}{4}[\int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi+i\psi}-\int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi-i\psi}],$$

$\forall\,\varphi,\psi\in\mathcal{H}$. 往证 $B(\varphi,\psi)$ 是 $\mathcal{H}$ 上有界共轭双线性泛函.

因标量值谱测度是正则正 Borel 测度，于是对 $g\in\mathcal{B}(\sigma(A))$ ，有序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset C(\sigma(A))$ ，使 $\|f_n\|_\infty\le\|g\|_\infty$ ，且 $\int_{\sigma(A)}|f_n-g|\mathrm{d}\mu\to 0, 当n\to\infty$. 由定理 IV.4.1 ， $\forall\xi\in\mathcal{H}$ ， $\mu_\xi\ll\mu$. 故亦有 $\int_{\sigma(A)}|f_n-g|\mathrm{d}\mu_\xi\to 0, 当n\to\infty$. 从而

$$\int_{\sigma(A)} f_n\mathrm{d}\mu_\xi\to\int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_\xi, 当n\to\infty\ . \tag{4.3}$$

由 (4.2) ， $(f_n(A)\varphi,\psi)=\frac14[\int_{\sigma(A)} f_n\mathrm{d}\mu_{\varphi+\psi}-\int_{\sigma(A)} f_n\mathrm{d}\mu_{\varphi-\psi}]+\frac{i}{4}[\int_{\sigma(A)} f_n\mathrm{d}\mu_{\varphi+i\psi}-\int_{\sigma(A)} f_n\mathrm{d}\mu_{\varphi-i\psi}]$.
令 $n\to 0$ ，根据 (4.3) 可得

$$\begin{aligned}&\lim_n (f_n(A)\varphi,\psi)\\ =\ &\tfrac14[\int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi+\psi}-\int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi-\psi}]+\tfrac{i}{4}[\int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi+i\psi}-\int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi-i\psi}]\\ =\ &B(\varphi,\psi).\end{aligned}$$

因 $(f_n(A)\varphi,\psi)$ 是 $\mathcal{H}$ 上共轭双线性泛函，因而 $B(\varphi,\psi)$ 也是 $\mathcal{H}$ 上共轭双线性泛函. 又

$$|(f_n(A)\varphi,\psi)| \le \|f_n(A)\|\|\varphi\|\,\|\psi\| \le \|f_n\|_\infty\|\varphi\|\,\|\psi\| \le \|g\|_\infty\|\varphi\|\,\|\psi\| .$$

于是 $|B(\varphi,\psi)| \le \|g\|_\infty\|\varphi\|\,\|\psi\|, \forall\varphi,\psi\in\mathcal{H}$. 可见 $B(\varphi,\psi)$ 是 $\mathcal{H}$ 上有界共轭双线性泛函. 从而存在 $\mathcal{H}$ 上有界线性算子，记为 $g(A)$ ，使 $B(\varphi,\psi)=(g(A)\varphi,\psi), \forall\varphi,\psi\in\mathcal{H}$. 即

$$\begin{aligned}(g(A)\varphi,\psi) = \;& \tfrac{1}{4}[\textstyle\int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi+\psi} - \int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi-\psi}] \\ & +\tfrac{i}{4}[\textstyle\int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi+i\psi} - \int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi-i\psi}]\end{aligned} \tag{4.4}$$

或者

$$(g(A)\varphi,\psi) = \lim_{n\to\infty}(f_n(A)\varphi,\psi),\ \forall\varphi,\psi\in\mathcal{H} .$$

这表明 $f_n(A)$ 按弱算子拓扑收敛于 $g(A)$.

这个结果可以加强为

命题 IV.4.4 设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴的， $g\in\mathcal{B}(\sigma(A))$. $f_n\in C(\sigma(A)), n=1,2,\cdots$ ， $\{f_n\}$ 一致有界且 $f_n(x)\to g(x),\ [\mu]a.e.$于$\sigma(A)$ ，则 $f_n(A)\to g(A)$ (按 SOT) .

证明 首先， $\forall\varphi,\psi\in\mathcal{H}$

$$\begin{aligned}(f_n(A)\varphi,\psi) = \;& \tfrac{1}{4}[\textstyle\int_{\sigma(A)} f_n\mathrm{d}\mu_{\varphi+\psi} - \int_{\sigma(A)} f_n\mathrm{d}\mu_{\varphi-\psi}] \\ & +\tfrac{i}{4}[\textstyle\int_{\sigma(A)} f_n\mathrm{d}\mu_{\varphi+i\psi} - \int_{\sigma(A)} f_n\mathrm{d}\mu_{\varphi-i\psi}]\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}(g(A)\varphi,\psi) = \;& \tfrac{1}{4}[\textstyle\int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi+\psi} - \int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi-\psi}] \\ & +\tfrac{i}{4}[\textstyle\int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi+i\psi} - \int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_{\varphi-i\psi}]\end{aligned} \tag{4.6}$$

对任何 $\xi\in\mathcal{H},\ \mu_\xi\ll\mu$. 由假设 $f_n(x)\to g(x),\ [\mu_\xi]$ a. e. 于 $\sigma(A)$. 由控制收敛定理，

$$\lim_{n\to\infty}\textstyle\int_{\sigma(A)} f_n\mathrm{d}\mu_\xi = \int_{\sigma(A)} g\mathrm{d}\mu_\xi .$$

于是，当 $n\to\infty$ ， (4.5) 式右端收敛于 (4.6) 式右端. 故 (4.5) 式左端收敛于 (4.6) 式左端，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n(A)\varphi,\psi)=(g(A)\varphi,\psi), \forall\varphi,\psi\in\mathcal{H}$. 这说明 $f_n(A)\to g(A)$ (WOT) .

对任何 $\psi\in\mathcal{H}$ ，由连续函数演算性质.

$$\begin{aligned}& \|f_n(A)\psi - f_m(A)\psi\| \\ = \;& (f_n(A)\psi - f_m(A)\psi, f_n(A)\psi - f_m(A)\psi)^{1/2} \\ = \;& ([f_n(A)\psi - f_m(A)]^*[f_n(A)-f_m(A)]\psi,\psi)^{1/2} \\ = \;& (|f_n-f_m|^2(A)\psi,\psi)^{1/2} \\ = \;& (\textstyle\int_{\sigma(A)}|f_n-f_m|^2\mathrm{d}\mu_\psi)^{1/2} \\ \le \;& (\textstyle\int_{\sigma(A)}|f_n-g|^2\mathrm{d}\mu_\psi)^{1/2} + (\int_{\sigma(A)}|f_m-g|^2\mathrm{d}\mu_\psi)^{1/2} \to 0, \quad \text{当} n,m\to\infty.\end{aligned}$$

这说明 $\{f_n(A)\psi\}$ 是 Cauchy 序列，当然收敛. 于是存在 $B\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，使 $f_n(A)\to B$ (SOT) ，从而 $f_n(A)\to B$ (WOT) . 而弱算子拓扑中的极限是唯一的. 故 $B=g(A)$. 于是 $f_n(A)\to g(A)$ (SOT) . ◇

定义映射 $\hat{J}:\mathcal{B}(\sigma(A))\to\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 为

$$\hat{J}(f)=f(A),\ \forall f\in\mathcal{B}(\sigma(A)) .$$

这里 $f(A)$ 是由 (4.4) 式给定的，容易看出 $\hat{J}$ 是自伴算子连续函数演算的扩张，称为 A 之 <u>Borel 函数演算</u> .

定理 IV.4.5 (自伴算子的 Borel 函数演算) 设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴的， μ 是 A 之标量值谱测度. 则从 $\mathcal{B}(\sigma(A))$ 到 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的映射 $\hat{J}$: $f\mapsto f(A)$ ，有如下性质：

(a) $\hat{J}$ 是代数 *- 同态.

(b) $\hat{J}(1)=I$ ，若 $f_0(x)=x, \forall x\in\sigma(A)$ ，则 $\hat{J}(f_0)=A$.

(c) $\|\widehat{J}(f)\| = \|f\|_\infty$.

(d) 若 $f_n, f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$, $n = 1, 2, \cdots$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 按 $\|\cdot\|_\infty$ 有界，且 $f_n(x) \to f(x)$, $[\mu]$ a. e. 于 $\sigma(A)$. 则 $f_n(A) \to f(A)$ (SOT) .

(e) 若 f 是实值函数，则 $f(A)$ 是自伴的；若 $f \geq 0$ ，则 $f(A) \geq 0$.

(f) 若 $\lambda \in \mathbb{C}$, $\psi \in \mathcal{H}$ ，使 $A\psi = \lambda\psi$ ，则 $f(A)\psi = f(\lambda)\psi$, $\forall f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$.

(g) 若 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，使 $TA = AT$ ，则 $Tf(A) = f(A)T$ ， $\forall f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$.

证明 (a) 只需证 $\hat{J}$ 是保持乘法的，其余证明是类似的．设 $f, g \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ ，取一致有界的 $f_n, g_n \in C(\sigma(A))$ ，使 $\int_{\sigma(A)} |f_n - f| \mathrm{d}\mu \to 0$, $\int_{\sigma(A)} |g_n - g| \mathrm{d}\mu \to 0$ ．于是由命题 IV.4.4 ，$f_n(A) \to f(A)$ (SOT) ， $f_n(A) \to f(A)$ (SOT) ．于是 $f_n(A)g_n(A) \to f_n(A)g_n(A)$ (SOT) ．又 $\{f_n g_n\}$ 也是一致有界的，且

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(A)} |f_n g_n - fg| \mathrm{d}\mu &\leq \int_{\sigma(A)} |f_n g_n - f_n g| \mathrm{d}\mu + \int_{\sigma(A)} |f_n g - fg| \mathrm{d}\mu \\ &\leq \|f_n\|_\infty \int_{\sigma(A)} |g_n - g| \mathrm{d}\mu + \|g\|_\infty \int_{\sigma(A)} |f_n - f| \mathrm{d}\mu \to 0.\end{aligned}$$

故 $(f_n g_n)(A) \to (fg)(A)$ (SOT) ．因 $f_n, g_n \in C(\sigma(A))$ ，由连续函数演算，

$$(f_n g_n)(A) = f_n(A) g_n(A) .$$

令 $n \to \infty$ ，由强算子拓扑中极限之唯一性有 $(fg)(A) = f(A)g(A)$.

(b) 这是显然的.

(c) 首先， $\forall f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ ，由 $\hat{J}$ 是代数 * 同态可知，

$$\begin{aligned}\|f(A)\psi\|^2 &= (f(A)\psi, f(A)\psi) = (f(A)^* f(A)\psi, \psi) \\ &= (|f|^2(A)\psi, \psi) = \int_{\sigma(A)} |f|^2 \mathrm{d}\mu_\psi \\ &\leq \|f\|_\infty^2 \mu_\psi(\sigma(A)) = \|f\|_\infty^2 \|\psi\|^2, \forall \psi \in \mathcal{H}.\end{aligned}$$

可见 $\|f(A)\| \leq \|f\|_\infty$.

反之，因 μ 是标量值谱测度，存在 $\psi \in \mathcal{H}$ ，使 $\mu = \mu_\psi$ ． $\forall \varepsilon > 0$ ，令

$$E = \{x \in \sigma(A); |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\} .$$

则 $\mu(E) > 0$ ．记 $h = \mathcal{X}_E$ ，则 $h \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ ，而且

$$\|h(A)\psi\|^2 = (|h|^2(A)\psi, \psi) = \int_{\sigma(A)} |h|^2 \mathrm{d}\mu_\psi = \int_E \mathrm{d}\mu_\psi = \mu_\psi(E) = \mu(E) > 0.$$

又

$$\begin{aligned}\|f(A)h(A)\psi\|^2 &= \|(fh)(A)\psi\|^2 = \int_{\sigma(A)} |fh|^2 \mathrm{d}\mu_\psi = \int_E |f|^2 \mathrm{d}\mu_\psi \\ &\geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^2 \int_E \mathrm{d}\mu_\psi = (\|f\|_\infty - \varepsilon)^2 \mu(E).\end{aligned}$$

可见 $\|f(A)\| \geq \frac{\|f(A)h(A)\psi\|}{\|h(A)\psi\|} \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$ ．因为 ε 是任意的，故 $\|f(A)\| \geq \|f\|_\infty$.

(d) $\forall \psi \in \mathcal{H}$ ，由 $\hat{J}$ 是代数 * 同态，

$$\begin{aligned}\|f_n(A)\psi - f(A)\psi\|^2 &= ([f_n(A) - f(A)]\psi, [f_n(A) - f(A)]\psi) \\ &= ([f_n(A) - f(A)]^*[f_n(A) - f(A)]\psi, \psi) \\ &= (|f_n - f|^2(A)\psi, \psi) \\ &= \int_{\sigma(A)} |f_n - f|^2 \mathrm{d}\mu_\psi.\end{aligned}$$

注意， $\mu_\psi \ll \mu$ ，由假设 $|f_n(x) - f(x)| \to 0, [\mu_\psi]\, a.e.$于$\sigma(A)$ ．又 $|f_n - f|$ 是一致有界的，由 Lebesgue 控制收敛定理， $\|[f_n(A) - f(A)]\psi\|^2 = \int_{\sigma(A)} |f_n - f|^2 \mathrm{d}\mu_\psi \to 0$.

(e) 利用 $\hat{J}$ 是代数 * 同态可得.

(f) $\forall f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$ ，取 $f_n \in C(\sigma(A))$ 使 $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, $n = 1, 2, \cdots$ ，且

$$f_n(x) \to f(x),\ [\mu] \text{ a. e. 于 } \sigma(A) .$$

由命题 IV.4.4， $f_n(A) \to f(A)$ (SOT)．由推论 IV.3.10， $\sigma_p(A) = \mu$ 之纯点集合，于是 $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$, $n \to \infty$．由连续函数演算我们有 $f_n(A)\psi = f_n(\lambda)\psi, n = 1, 2, \cdots$．令 $n \to \infty$，可得 $f(A)\psi = f(\lambda)\psi$．

(g) $\forall f \in \mathcal{B}(\sigma(A))$，存在 $f_n \in C(\sigma(A))$, $n = 1, 2, \cdots$，使 $f_n(A) \to f(A)$．由假设及连续函数演算， $Tf_n(A) = f_n(A)T, n = 1, 2, \cdots$．令 $n \to \infty$，由强算子拓扑极限唯一性，$Tf(A) = f(A)T$． ◇

IV.5 射影值谱测度、自伴算子谱定理

定义 IV.5.1 设 $\mathcal{B}$ 表示 $\mathbb{R}$ 上 Borel 代数， $\mathcal{P}$ 表示 $\mathcal{H}$ 上全体正交射影集合．如果映射 $E: \mathcal{B} \to \mathcal{P}$ 具有如下性质：

(a) $E(\mathbb{R}) = I, E(\emptyset) = 0$；

(b) E 是强可数可加的，即对任意两两不交可数个 $S_n \in \mathcal{B}, n = 1, 2, \cdots$，总有

$$E(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(S_n) \text{ (SOT)}.$$

即对 $\forall \psi \in \mathcal{H}$， $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n)\psi = \sum_{n=1}^{\infty} E(S_n)\psi$，右端级数按 $\mathcal{H}$ 中范数收敛.

(c) 存在紧集 K，对任意 $S \in \mathcal{B}$，只要 $S \cap K = \emptyset$，必有 $E(S) = 0$；

则称 $E : \mathcal{B} \to \mathcal{P}$ 是 <u>射影值谱测度</u>，或者 <u>单位分解</u>．

注: (i) 由 (a)， (b) 立即可得 E 是有限可加的，即任给有限个两两不交的 Borel 集 $S_1, \cdots, S_N$，有 $E(\bigcup_{n=1}^{N} S_n) = \sum_{n=1}^{N} E(S_n)$．

(ii) 对任意 $S_1, S_2 \in \mathcal{B}$，当 $S_1 \subset S_2$， $E(S_1) \le E(S_2)$．

事实上，取 $S_1' = S_2 \setminus S_1$，则 $S_1' \cap S_1 = \emptyset$，且 $S_2 = S_1 \cup S_1'$．故由 (i)，

$$E(S_2) = E(S_1) + E(S_1') \ge E(S_1).$$

(iii) 对任意的 $S_1, S_2 \in \mathcal{B}$， $E(S_1)E(S_2) = E(S_1 \cap S_2)$．

事实上，

$$S_1 \cup S_2 = [S_1 \backslash S_2] \cup [S_2 \backslash S_1] \cup [S_1 \cap S_2],$$
$$S_1 = [S_1 \backslash S_2] \cup [S_1 \cap S_2],$$
$$S_2 = [S_2 \backslash S_1] \cup [S_1 \cap S_2].$$

而 $S_1 \backslash S_2, S_2 \backslash S_1, S_1 \cap S_2$ 两两不交，故

$$E(S_1 \cup S_2) = E(S_1 \backslash S_2) + E(S_2 \backslash S_1) + E(S_1 \cap S_2),$$
$$E(S_1) = E(S_1 \backslash S_2) + E(S_1 \cap S_2),$$
$$E(S_2) = E(S_2 \backslash S_1) + E(S_1 \cap S_2).$$

这样 $E(S_1 \cup S_2) + E(S_1 \cap S_2) = E(S_1) + E(S_2)$．用 $E(S_1)$ 作用上式两端可得

$$E(S_1)E(S_1 \cup S_2) + E(S_1)E(S_1 \cap S_2) = E(S_1) + E(S_1)E(S_2).$$

我们知道，对任意正交射影 P, Q 有 $PQ = QP = P \Leftrightarrow P \le Q$．利用 (ii) 可得

$$E(S_1) + E(S_1 \cap S_2) = E(S_1) + E(S_1)E(S_2).$$

即 $E(S_1 \cap S_2) = E(S_1)E(S_2)$．

(iv) 对任意 $S_1, S_2 \in \mathcal{B}$， $E(S_1)E(S_2) = E(S_2)E(S_1)$．

定义 IV.5.2 设 $E:\mathcal{B}\to\mathcal{P}$ 是射影值谱测度. 使 $E(G)=0$ 的最大开集 G 之余集称为 E 的 支集，记作 $\mathrm{supp}E$.

定义 1 中 (c) 是说 E 具有紧支集.

设 $E:\mathcal{B}\to\mathcal{P}$ 是射影值谱测度， $\forall x,\, y\in\mathcal{H}$, 令

$$E_{(x,y)}(S)=(E(S)x,y),\ S\in\mathcal{B}\ .$$

易验证 $E_{(x,y)}$ 是 $\mathbb{R}$ 上复 Borel 测度，具有紧支集. 特别 $E_{(x,x)}$ 是 $\mathbb{R}$ 上正 Borel 测度，从而是正则的，且 $\|E_{(x,x)}\|=E_{(x,x)}(\mathbb{R})=(E(\mathbb{R})x,x)=\|x\|^2$. 由极化恒等式， $\forall S\in\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}E_{(x,y)}(S)= &\ (E(S)x,y)\\ = &\ \tfrac{1}{4}[(E(S)(x+y),(x+y))-(E(S)(x-y),(x-y))]\\ &+\tfrac{i}{4}[(E(S)(x+iy),(x+iy))-(E(S)(x-iy),(x-iy))]\\ = &\ \tfrac{1}{4}[E_{(x+y,x+y)}(S)-E_{(x-y,x-y)}(S)]\\ &+\tfrac{i}{4}[E_{(x+iy,x+iy)}(S)-E_{(x-iy,x-iy)}(S)].\end{aligned}\tag{5.1}$$

可见 $E_{(x,y)}$ 是 $\mathbb{R}$ 上复正则 Borel 测度.

设 f 是 $\mathbb{R}$ 上有界 Borel 函数，积分 $\int_{\mathbb{R}}f(\lambda)\mathrm{d}E_{(x,y)}$ 有定义，记

$$\int_{\mathbb{R}}f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y)=\int_{\mathbb{R}}f(\lambda)\mathrm{d}E_{(x,y)},\ \forall x,\, y\in\mathcal{H}\ .$$

下面我们将证明，对固定 f ，如上积分 $\int_{\mathbb{R}}f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y)$ 是 $\mathcal{H}$ 上共轭双线性泛函. 令

$$\Phi(x,y)=\int_{\mathbb{R}}f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y)\ ,\quad \forall x,\, y\in\mathcal{H}\ .$$

注意，对任意 $S\in\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}E_{<x_1+x_2,y>}(S) &=(E(S)(x_1+x_2),y)=(E(S)x_1,y)+(E(S)x_2,y)\\ &=E_{<x_1,y>}(S)+E_{<x_2,y>}(S),\end{aligned}$$

所以 $\Phi(x_1+x_2,y)=\Phi(x_1,y)+\Phi(x_2,y)$. 类似可以证明， $\Phi(x,y)$ 是 $\mathcal{H}$ 上共轭双线性泛函. 此外,

$$\begin{aligned}|\Phi(x,x)| &=|\int_{\mathbb{R}}f(\lambda)\mathrm{d}E_{<x,x>}|\le\|f\|_\infty|\int_{\mathbb{R}}1\mathrm{d}E_{<x,x>}|\\ &=\|f\|_\infty E_{<x,x>}(\mathbb{R})=\|f\|_\infty\|x\|^2.\end{aligned}$$

由 (5.1) 可得

$$\begin{aligned}\Phi(x,y)= &\ \tfrac{1}{4}[\Phi(x+y,x+y)-\Phi(x-y,x-y)]\\ &+\tfrac{i}{4}[\Phi(x+iy,x+iy)-\Phi(x-iy,x-iy)].\end{aligned}$$

于是，当 $\|x\|=\|y\|=1$ 时,

$$\begin{aligned}|\Phi(x,y)|\le &\ \tfrac{1}{4}(|\Phi(x+y,x+y)|+|\Phi(x-y,x-y)|\\ &+|\Phi(x+iy,x+iy)|+|\Phi(x-iy,x-iy)|)\\ \le &\ \tfrac{1}{4}[\|f\|_\infty\|x+y\|^2+\|f\|_\infty\|x-y\|^2\\ &+\|f\|_\infty\|x+iy\|^2+\|f\|_\infty\|x-iy\|^2]\\ \le &\ \tfrac{1}{4}\|f\|_\infty[2(\|x\|^2+\|y\|^2)+2(\|x\|^2+\|iy\|^2)]\\ \le &\ \|f\|_\infty(\|x\|^2+\|y\|^2)=2\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

可见 $\Phi(x,y)$ 是有界共轭双线性泛函, 而且 $\|\Phi\|\le 2\|f\|_\infty$. 于是必存在 $\mathcal{H}$ 上有界线性算子 B , 使 $\Phi(x,y)=(Bx,y),\forall x,y\in\mathcal{H}$ ，且 $\|B\|=\|\Phi\|$. 即 $(Bx,y)=\int_{\mathbb{R}}f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y),\forall x,y\in\mathcal{H}$, 且 $\|B\|\le 2\|f\|_\infty$. 显然满足上式的 B 是唯一确定的. 于是我们证明了如下定理

定理 IV.5.1 设 $E:\mathcal{B}\to\mathcal{P}$ 是射影值谱测度， f 是 $\mathbb{R}$ 上有界 Borel 函数，则有唯一的 $B\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，使

$$(Bx,y)=\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y), \forall x,y\in\mathcal{H} \tag{5.2}$$

且 $\|B\|=\|\Phi\|$.

实际上 (5.2) 以弱的形式定义了 $\mathcal{H}$ 上一个有界线性算子．今后将 (5.2) 简记为

$$B=\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda \ .$$

容易看到，若 $m=\inf\operatorname{supp}E,\ M=\sup\operatorname{supp},E$ ，则也可记为

$$B=\int_{m-0}^{M} f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda \ .$$

用 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上全体有界 Borel 函数按上确界范数作成的赋范代数．给定射影值谱测度 $E:\mathcal{B}\to\mathcal{P}$ 之后，我们即得到映射 $\hat{J}:\mathcal{B}(\mathbb{R})\to\mathcal{L}(\mathcal{H})$:

$$\hat{J}(f)=\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda,\ f\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ .$$

定理 IV.5.2 映射 $\hat{J}:\ \mathcal{B}(\mathbb{R})\to\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是代数 * 同态，即对任意 $f,g\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}$ ，有

(a) $\hat{J}$ 是线性的，即 $\hat{J}(\alpha f+\beta g)=\alpha\hat{J}(f)+\beta\hat{J}(g)$;

(b) $\hat{J}$ 是乘法的，即 $\hat{J}(fg)=\hat{J}(f)\hat{J}(g)$;

(c) $\hat{J}$ 是保 * 的，即 $[\hat{J}(f)]^*=\hat{J}(\bar{f})$.

此外还有

(d) $\hat{J}(1)=I$.

证明 (a) 和 (d) 是明显的.

(b) 若 $f=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\mathcal{X}_{I_k},\ g=\sum\limits_{j=1}^{m}b_j\mathcal{X}_{F_j}$ 都是简单函数，这里 $\{I_k\}_{k=1}^n,\ \{F_j\}_{j=1}^m$ 皆为 $\mathbb{R}$ 的分划，则易证

$$\hat{J}(f)=\sum_{k=1}^{n}a_kE(I_k),\ \hat{J}(g)=\sum_{j=1}^{m}ab_kE(F_j) \ .$$

从而 $\hat{J}(f)\hat{J}(g)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}a_kb_jE(I_k)E(F_j)$ ．而 $fg=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}a_kb_j\mathcal{X}_{I_k\cap F_j}$ 亦是简单函数，故

$$\hat{J}(fg)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_kb_jE(I_k\cap F_j) \ .$$

由谱测度性质 (iii) ， $E(I_k)E(F_j)=E(I_k\cap F_j),\ k=1,2,\cdots n,\ j=1,2,\cdots m$ ．所以

$$\hat{J}(f)\hat{J}(g)=\hat{J}(fg) \ .$$

对一般有界 Borel 函数 $f,\ g$, 存在简单函数列 $f_n,\ g_n$ 使 $\|f_n-f\|_\infty\to 0$ ， $\|g_n-g\|_\infty\to 0$ ，从而 $\|f_ng_n-fg\|_\infty\to 0$ ，当 $n\to\infty$ ．由定理 IV.5.1 及该定理 (a) 有

$$\|\hat{J}(f_n)-\hat{J}(f)\|=\|\hat{J}(f_n-f)\|\le 2\|f_n-f\|_\infty\to 0 \text{ ，当 } n\to\infty \ .$$

类似地

$$\|\hat{J}(g_n)-\hat{J}(g)\|\to 0,\ \|\hat{J}(f_ng_n)-\hat{J}(fg)\|\to 0, \text{当} n\to\infty \ .$$

已证 $\hat{J}(f_ng_n)=\hat{J}(f_n)\hat{J}(g_n),\ n=1,2,\cdots$ ．令 $n\to\infty$, 即有

$$\hat{J}(fg)=\hat{J}(f)\hat{J}(g) \ .$$

(c) 注意对任意 $x,\ y\in\mathcal{H}$ ， $S\in\mathcal{B}$ ，

$$E_{<y,x>}(S)=(E(S)y,x)=(y,E(S)x)=\overline{(E(S)x,y)}=\overline{E_{<x,y>}(S)} \ .$$

这表明标量值谱测度 $E_{<y,x>}$ 恰好是 $E_{<x,y>}$ 之复共轭．于是对任何 $x,y\in\mathcal{H}$

$$\begin{aligned}([\hat{J}(f)]^*x,y) &= (x,\hat{J}(f)y)=\overline{(\hat{J}(f)y,x)}=\overline{\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda y,x)}\\ &= \int_{\mathbb{R}}\overline{f(\lambda)}\mathrm{d}(E_\lambda x,y)=(\hat{J}(\bar{f})x,y).\end{aligned}$$

故 $[\hat{J}(f)]^*=\hat{J}(\bar{f})$. ◇

定理 IV.5.3 设 $\mathcal{H}$ 是可分 Hilbert 空间，$A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是自伴算子．$m=\inf\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$，$M=\sup\limits_{\|x\|=1}(Ax,x)$．则存在唯一的射影值谱测度 E，使 $m=\inf\operatorname{supp}E$，$M=\sup\operatorname{supp}E$，且

$$A=\int_{m-0}^{M}\lambda\mathrm{d}E_\lambda\ .$$

证明 设 $\widetilde{J}:\mathcal{B}(\mathbb{R})\to\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是 A 之扩张 Borel 函数演算．定义

$$E(S)=\widetilde{J}(\mathcal{X}_S),\ \forall S\in\mathcal{B}\ .$$

由 Borel 函数演算性质可知 $E(S)\in\mathcal{P}$．往证 $E:\mathcal{B}\to\mathcal{P}$ 是射影值谱测度.

(a) 显然有 $E(\mathbb{R})=I$ 及 $E(\emptyset)=0$．

(b) 设 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是两两不交的 Borel 集合序列,令 $S=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S_n$，$\varphi_k=\mathcal{X}_{\bigcup\limits_{n=1}^{k}S_n}$，$k=1,2,\cdots$，$\varphi_0=\mathcal{X}_S$．则 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 一致有界，且

$$\varphi_k(x)\to\varphi_0(x)\ ,\quad k\to\infty,\ \forall x\in\mathbb{R}\ .$$

由 Borel 函数验算性质，$\tilde{J}(\varphi_k)\to\tilde{J}(\varphi_0)$ (SOT). 而 $\varphi_k=\sum\limits_{n=1}^{k}\mathcal{X}_{S_n}$，于是 $\tilde{J}(\mathcal{X}_{S_n})=\sum\limits_{n=1}^{k}E(S_n)$，$\tilde{J}(\varphi_0)=\tilde{J}(\mathcal{X}_S)=E(S)$．这样 $\sum\limits_{n=1}^{k}E(S_n)\to E(S)$ (SOT)，即 $E(S)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}E(S_n)$．右端级数在强算子拓扑下收敛.

(c) 取 $K=[m,M]$，则 $\sigma(A)\subset[m,M]$．对任意 $S\in\mathcal{B}$，若 $S\cap K=\emptyset$，则 $\mathcal{X}_S|_{\sigma(A)}=0$．从而 $E(S)=\tilde{J}(\mathcal{X}_S)=\hat{J}(\mathcal{X}_S|_{\sigma(A)})=0$．所以 $\operatorname{supp}E\subset[m,M]$．因而 $E:\mathcal{B}\to\mathcal{P}$ 是射影值谱测度.

以下证明，对任何 $x,y\in\mathcal{H}$，$(Ax,y)=\int_{m-0}^{M}\lambda\mathrm{d}(E_\lambda x,y)$．为此，证明对任何连续函数 $f\in C([m,M])$ 都有

$$(f(A)x,y)=\int_{m-0}^{M}f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y)\ ,$$

这里 $f(A)$ 是 A 之连续函数演算.

对任何 $\varepsilon>0$，由 f 的一致连续性，存在 $\delta>0$，使

$$|f(\lambda')-f(\lambda)|<\varepsilon\ ,\ 当\ \lambda',\lambda\in[m,M],\ |\lambda'-\lambda|<\delta\ .$$

对 $\mathbb{R}$ 上分划 $\mathcal{D}$: $m=\mu_0<\mu_1<\cdots<\mu_n=M$ 及 $\xi_k\in\Delta_k=[\mu_{k-1},\mu_k],\ 0<k\le n,\ \xi_1>m$，令

$$f_\varepsilon(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\mathcal{X}_{\Delta_k}(\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}\ .$$

则 f_ε 是有界 Borel 函数，且只要 $\|\mathcal{D}\|=\max\limits_{1\le k\le n}|\mu_k-\mu_{k+1}|<\delta$，就有 $\|f_\varepsilon-f\|_\infty<\varepsilon$．由 Borel 函数演算有 $\|\tilde{J}(f_\varepsilon)-\tilde{J}(f)\|<\varepsilon$．但 $\tilde{J}(f)=f(A)$，而 f_ε 是简单函数,

$$\tilde{J}(f_\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\tilde{J}(\mathcal{X}_{\Delta_k})=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)E(\Delta_k)\ .$$

于是对任何 $x,y\in\mathcal{H}$，

$$\begin{aligned}|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)E_{<x,y>}(\Delta_k)-(f(A)x,y)| &= |(\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)E(\Delta_k)x,y)-(f(A)x,y)|\\ &= |([\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)E(\Delta_k)-f(A)]x,y)|\\ &\le \|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)E(\Delta_k)-f(A)\|\|x\|\,\|y\|\\ &= \|\tilde{J}(f_\varepsilon)-\tilde{J}(f)\|\|x\|\,\|y\|<\varepsilon\|x\|\,\|y\|.\end{aligned}$$

故 $\int_{m-0}^{M}f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y)=(f(A)x,y)$．

最后证谱测度唯一性．设又有谱测度 $F:\mathcal{B}\to\mathcal{P},\ \mathrm{supp}F\subset[m,M]$，使

$$A=\int_{m-0}^{M}\lambda\mathrm{d}F_\lambda\ .$$

根据定理 IV.5.2，映射 $\hat{J}:\mathcal{B}(\mathbb{R})\to\mathcal{L}(\mathcal{H})$，

$$\hat{J}:\ f\to\int_{\mathbb{R}}f(\lambda)\mathrm{d}F_\lambda=\int_{m-0}^{M}f(\lambda)\mathrm{d}F_\lambda\ ,$$

也是代数 * 同态．从而对任意多项式 p，

$$\int_{m-0}^{M}p(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda=p(A)=\int_{m-0}^{M}p(\lambda)\mathrm{d}F_\lambda\ .$$

对任何 $x\in\mathcal{H}$，

$$\int_{m-0}^{M}p(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,x)=\int_{m-0}^{M}p(\lambda)\mathrm{d}(F_\lambda x,x)\ ,$$

左、右两端测度都是正则正 Borel 测度．由 Stone-Weierstrass 定理，对任何 $f\in C[m,M]$，存在一致有界多项式序列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$，使 $\|p_n-f\|_\infty\to0,\ n\to\infty$．于是在

$$\int_{m-0}^{M}p_n(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,x)=\int_{m-0}^{M}p_n(\lambda)\mathrm{d}(F_\lambda x,x)$$

两端，令 $n\to\infty$ 可得

$$\int_{m-0}^{M}f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,x)=\int_{m-0}^{M}f(\lambda)\mathrm{d}(F_\lambda x,x)\ .$$

由 Riesz-Markov 定理唯一性论断，对任何 $S\in\mathcal{B}$ 我们有

$$(E(S)x,x)=(F(S)x,x),\ \forall x\in\mathcal{H}\ .$$

再由极化恒等式，可得

$$(E(S)x,y)=(F(S)x,y),\ \forall x,y\in\mathcal{H}\ .$$

故 $E(S)=F(S)$． ◇

定义 IV.5.3 定理 IV.5.3 中唯一的射影值谱测度 E 称为 A 的射影值谱测度，或 A 的单位分解.

至此我们已经建立了自伴算子谱定理，即本科《泛函分析》第五章 §5 中定理 5.1，这样自伴算子谱理论就完全了.

如果定理给定的是 Hilbert 空间上的正规算子，我们只须考虑 $\mathbb{C}$ 上的全体 Borel 集合及 $\mathbb{C}$ 上有界 Borel 函数，可以建立起正规算子的谱定理，方法是完全类似的．这里我们不再叙述，只在第六章中几个地方用到少量结果.

练习题

1 设 $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是正规算子．证明：存在等距代数 $*$ 同态 $\Phi : C(\sigma(N)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足：$\Phi(1) = I$ ，$\Phi(f_0) = N$ ，其中，$f_0(z) = z$ ，$\forall z$ ．（这个 Φ 称为关于正规算子 N 的连续函数演算）

2 设 $X = \{x_1, x_2 \cdots, x_n\}$ 为有限集合．对其子集 E ，令 $\mu(E) = \mathrm{Card}\, E$ 为其基数．考察 $L^2(X, \mu)$ 及其上乘法算子.

3 设 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单位圆中稠子列. 在 l^2 上定义算子 $T : \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \mapsto \{\lambda_n \alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$. 求 $\sigma(T), \sigma_p(T)$.

4 在 l^1 上定义算子 $T : \{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty} \mapsto \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ ，其中，

$$\beta_j = \begin{cases} 0 & \text{当 } j = 0\,, \\ \alpha_{j-1} & \text{当 } j \in \{2k\}_{k=1}^{\infty}\,, \\ 2\alpha_j & \text{当 } j \in \{2k+1\}_{k=1}^{\infty}. \end{cases}$$

求 $\|T^n\|$ ，$n \geq 1$.

5 设 $A, B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ，则

(a) 若 C 为 $I - AB$ 之逆，则 $I + BCA$ 为 $I - BA$ 之逆，

(b) $\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}$.

(c) 不存在 A, B 使得 $AB - BA = I$.

6 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ，则

(a) T 正规 $\Leftrightarrow \|Tx\| = \|T^*x\|$ ，$\forall x \in \mathcal{H}$.

(b) T 正规 $\Rightarrow \mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Ker}\, T^* = \mathrm{Ran}\, T^{\perp}$.

(c) T 正规，则 $Tx = \lambda x \Rightarrow T^*x = \overline{\lambda} x$.

(d) T 正规 $\Rightarrow$ 对应 T 的不同特征值的特征向量相互正交.

7 设 $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ．若存在正数 M 使得 $\|Sx\| \leq M\|Tx\|$ ，$\forall x \in \mathcal{H}$ ，则存在 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 使得 $S = WT$.

8 设 P_1, P_2 是两个正交射影，则下述等价：

(a) $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$.

(b) $\|P_1x\| \leq \|P_2x\|$ ，$\forall x$.

(c) $\mathrm{Ran}\, P_1 \subset \mathrm{Ran}\, P_2$.

(d) $P_2 - P_1$ 是正交射影.

9 设 P 是非平凡正交射影.

(a) 求 $\sigma(P)$.

(b) 对 $\lambda \in \rho(P)$ ，求 $(\lambda - P)^{-1}$ 的明显表达式.

10 设 A 为可逆的正算子．证明：存在 B 使得 $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$ ，这里级数按算子范数收敛．考察何时 B 为正算子.

11 设 A 为正算子，且有自然数 m 使得 A^m 是紧算子．证明：A 是紧算子．若将 "A 为正算子" 改为 "A 为自伴算子" 结论又如何？

12 设 A 为自伴算子，则存在正算子 A^+, A^- 使得 $A = A^+ - A^-$ 且 $A^+A^- = A^-A^+ = 0$.

13 设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ， $\operatorname{Ran}A\neq\overline{\operatorname{Ran}A}$.

(a) 证明：存在无穷维子空间 $\mathcal{H}_0$ 满足 $\mathcal{H}_0\cap\operatorname{Ran}A=\{0\}$.

(b) 证明：存在单射的紧算子 K 满足 $\operatorname{Ran}K\cap\operatorname{Ran}A=\{0\}$.

14 设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是正算子. 证明： $|(Ax,y)|\leq|(Ax,x)|_{1/2}|(Ay,y)|_{1/2}$ ， $\forall x,y\in\mathcal{H}$.

15 设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 之极分解为 $A=U|A|$, 则 A^* 之极分解为 $A^*=U^*|A^*|$, 从而对所有 $n=1,2,\cdots$ ， $|A|^nU^*=U^*|A^*|^n$ 即 $\begin{bmatrix}|A|^n & 0\\ 0 & |A^*|^n\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}0 & U^*\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 交换.

16 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),A\geq0,B\geq0$. 则 $AB\geq0\Longleftrightarrow AB=BA$.

17 举例说明两个正算子之积未必是正算子.

18 设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ，则 A 紧 $\Longleftrightarrow|A|$ 紧.

19 设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 之极分解为 $A=U|A|$, $f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\geq\frac{1}{n}\\ \\ \frac{1}{n}, & x<\frac{1}{n}\end{cases}$. 则 SOT-$\lim\limits_{n\to\infty}Af_n(|A|)=U$.

20 设 A 自伴， $(A-\lambda)\varphi=0,\varphi\neq0.$ 则 $\mu_\varphi(\sigma(A)\setminus\{\lambda\})=0,\mu_\varphi(\{\lambda\})=\|\varphi\|^2$.

21 设 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的一个正规正交基， T 是 $\mathcal{H}$ 上的一个有界自伴算子，而且 $Te_n=\frac{1}{n^2}e_n,\forall n\geq1$. 令 $\varphi=\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}e_n$ ， μ_φ 为 T 关于 φ 的谱测度. 令 $E=[0,\frac{1}{5}]$. 求 $\mu_\varphi(E)$.

第五章　$\mathcal{C}_p$ 类算子

本章中总假设 $\mathcal{H}$ 是可分的无穷维复 Hilbert 空间.

设 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是紧算子，则 A^*A 是紧自伴算子，由 Hilbert-Schmidt 定理，存在 $\mathcal{H}$ 的正规正交基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，使

$$A^*A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\varphi, e_n)e_n,\ \forall \varphi \in \mathcal{H}\ .$$

换言之，$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A^*A 之全部特征值，按重数重复排列. 不失一般性可设 $\mu_n \searrow 0$. e_n 是 A^*A 与 μ_n 相应之特征向量. 令 $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}, n = 1, 2, \cdots$，称 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A 的 奇异值. 对 $1 \le p < \infty$，记

$$\mathcal{C}_p = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}):\ A \text{ 是紧算子，且 } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p < +\infty\}\ .$$

可以证明，每个 $\mathcal{C}_p$ 都是 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 中一个理想，全体 $\mathcal{C}_p$ 中算子称为 Schatten 类算子. 特别 $p = 1$ 和 $p = 2$ 时，$\mathcal{C}_p$ 是两类很有用的重要理想. $\mathcal{C}_1$ 称为迹类算子，$\mathcal{C}_2$ 称为 Hilbert-Schmidt 类算子. 在这章中我们主要介绍这两类算子.

V.1　迹类算子

回忆线性代数，一个 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 对角线上表值的和 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ii}$ 称为 A 的迹 (trace)，记为 $\operatorname{tr} A$． $\operatorname{tr} A$ 是相似变换下的不变量，即若存在可逆矩阵 S，使 $A_1 = S^{-1}AS$，则 $\operatorname{tr} A_1 = \operatorname{tr} A$．

n 维空间 $\mathbb{C}^n$ 上的线性变换 A，在一个确定的正规正交基底 $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ 下总可以表示成 $n\times n$ 矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij} = (Ae_j, e_i), i, j = 1, \cdots, n$．

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (Ae_i, e_i)$$

亦称为 A 的迹. 它也是相似变换下的不变量，因而它与正规正交基的选取无关. 亦即对 $\mathbb{C}^n$ 的任一正规正交基 $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n}$，总有

$$\sum_{i=1}^{n} (A\varphi_i, \varphi_i) = \sum_{i=1}^{n} (Ae_i, e_i)\ .$$

对无穷维 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上有界线性算子 A，上述形式的和是一个无穷级数，不一定都有意义. 但是对于正算子 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，我们总可以定义

$$\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n)\ ,$$

其中 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的正规正交基. 为了定义的一意性，必须说明它与 $\mathcal{H}$ 之正规正交基的选取无关. 事实上，设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 另一正规正交基，则

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (A\varphi_n, \varphi_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A^{\frac12}\varphi_n, A^{\frac12}\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \|A^{\frac12}\varphi_n\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |(A^{\frac12}\varphi_n, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |(A^{\frac12}\varphi_n, e_k)|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi_n, A^{\frac12}e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|A^{\frac12}e_k\|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k).
\end{aligned}$$

定义 V.1.1 设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是正算子. 对 $\mathcal{H}$ 的任一正规正交基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，令

$$\operatorname{tr}A=\sum_{n=1}^{\infty}(Ae_n,e_n)\ ,$$

称为 A 的迹.

由上述运算可见，正算子 A 的迹可以表示为

$$\operatorname{tr}A=\sum_{n=1}^{\infty}\|A^{\frac12}e_n\|^2\ ,$$

其中 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{H}$ 的任一正规正交基. 如果 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ 只是 $\mathcal{H}$ 的正规正交系 (N 有限或可数)，必有

$$\sum_{k=1}^{N}(A\varphi_k,\ \varphi_k)=\sum_{n=1}^{N}\|A^{\frac12}\varphi_k\|^2\le\operatorname{tr}A\ .$$

但是，若 $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ 是 $N(A)^{\perp}$ 的正规正交基，就有

$$\sum_{k=1}^{N}(A\varphi_k,\varphi_k)=\sum_{n=1}^{N}\|A^{\frac12}\varphi_k\|^2=\operatorname{tr}A\ .$$

事实上，设 $\{\psi_m\}_{m=1}^{M}$(M 有限或者可数) 是 $N(A)$ 之正规正交基，则 $\{\varphi_k\}\cup\{\psi_m\}$ 是 $\mathcal{H}$ 之正规正交基. 于是

$$\operatorname{tr}A=\sum_{k=1}^{N}(A\varphi_k,\varphi_k)+\sum_{m=1}^{M}(A\psi_m,\psi_m)=\sum_{k=1}^{N}(A\varphi_k,\varphi_k)\ ,$$

这里用到 $\psi_m\in N(A)$ ，即 $A\psi_m=0,\ m=1,\cdots,M$.

关于正算子的迹有如下简单结果.

命题 V.1.1 设 $A,B\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 都是正算子，则

(a) $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}A+\operatorname{tr}B$.

(b) $\operatorname{tr}(\lambda A)=\lambda\operatorname{tr}A,\ \forall\lambda\ge 0$.

(c) 当 $A\ge B,\ \operatorname{tr}A\ge\operatorname{tr}B$.

(d) 若 U 是部分等距，则

$$\operatorname{tr}(UAU^*)\le\operatorname{tr}A\ .$$

特别，若 U 是酉算子或以 $N(A)^{\perp}$ 为初始空间，$\overline{R(A)}$ 为终空间的部分等距时，

$$\operatorname{tr}(UAU^*)=\operatorname{tr}A\ .$$

(e) 若 U,V 是部分等距，则

$$\operatorname{tr}(UVAV^*U^*)\le\operatorname{tr}A\ ,$$

且对任何正规正交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$(N 有限或可数)，

$$\sum_{n=1}^{N}|(UVA\varphi_n,\varphi_n)|\le[\sum_{n=1}^{N}(A\varphi_n,\varphi_n)]^{\frac12}(\operatorname{tr}A)^{\frac12}\le\operatorname{tr}A\ .$$

证明 (a)，(b)，(c) 是显然的.

(d) 设 $\{e_m\}_{m=1}^{M}$ 是 $N(U^*)$ 之正规正交基，$\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ 是 $N(U^*)^{\perp}$ 之正规正交基 (M 与 N 有限或可数)，则 $\{e_m\}_{m=1}^{M}\cup\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ 是 $\mathcal{H}$ 的正规正交基. 由 U^* 亦是部分等距, 故 $\{U^*\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ 仍是 $\mathcal{H}$ 中的正规正交系，$U^*e_m=0,\ m=1,\cdots,M$. 于是

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(UAU^*)&=\sum_{m=1}^{M}(UAU^*e_m,e_m)+\sum_{n=1}^{N}(UAU^*\varphi_n,\varphi_n)\\&=\sum_{n=1}^{N}(UAU^*\varphi_n,\varphi_n)=\sum_{n=1}^{N}(AU^*\varphi_n,U^*\varphi_n)\le\operatorname{tr}A.\end{aligned}$$

特别若 U 以 $N(A)^{\perp}$ 为初始空间，$\overline{R(A)}=N(A)^{\perp}$ 为终空间的部分等距，则 U 及 U^* 都是 $N(A)^{\perp}$ 上的酉算子. 这样，$\{U^*\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ 是 $N(A)^{\perp}$ 的正规正交基. 于是

$$\mathrm{tr}\,(UAU^*) = \sum_{n=1}^{N}(AU^*\varphi_n, U^*\varphi_n) = \mathrm{tr}\,A$$

U 是酉算子，则对 $\mathcal{H}$ 之任意正规正交基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，都有 $\{U^*e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 仍是 $\mathcal{H}$ 之正规正交基．于是

$$\mathrm{tr}\,(UAU^*) = \sum_{n=1}^{\infty}(UAU^*e_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(AU^*e_n, U^*e_n) = \mathrm{tr}\,A.$$

(e) 注意 $A \geq 0$ ，从而 $VAV^* \geq 0$ ，依次用 (d) 可得

$$\mathrm{tr}\,(UVAV^*U^*) \leq \mathrm{tr}\,(VAV^*) \leq \mathrm{tr}\,A\ .$$

设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ 是 $\mathcal{H}$ 的任意一个正规正交系，由 Schwarz 不等式,

$$|(UVA\varphi_n,\ \varphi_n)| = |(A^{\frac{1}{2}}\varphi_n,\ A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\varphi_n)| \leq \|A^{\frac{1}{2}}\varphi_n\|\|A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\varphi_n\|.$$

再由 Hölder 不等式及 (d)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}|(UVA\varphi_n,\varphi_n)| &\leq \sum_{n=1}^{N}\|A^{\frac{1}{2}}\varphi_n\|\,\|A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\varphi_n\| \\ &\leq (\sum_{n=1}^{N}\|A^{\frac{1}{2}}\varphi_n\|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{n=1}^{N}\|A^{\frac{1}{2}}V^*U^*\varphi_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= [\sum_{n=1}^{N}(A\varphi_n,\varphi_n)]^{\frac{1}{2}}[\sum_{n=1}^{N}(UVAV^*U^*\varphi_n,\varphi_n)]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq [\sum_{n=1}^{N}(A\varphi_n,\varphi_n)]^{\frac{1}{2}}[\mathrm{tr}\,(UVAV^*U^*)]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq [\sum_{n=1}^{N}(A\varphi_n,\varphi_n)]^{\frac{1}{2}}(\mathrm{tr}\,A)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

而 $[\sum_{n=1}^{N}(A\varphi_n,\varphi_n)]^{\frac{1}{2}} \leq (\mathrm{tr}\,A)^{\frac{1}{2}}$ ，故 $\sum_{n=1}^{N}|(UVA\varphi_n,\varphi_n)| \leq [\sum_{n=1}^{N}(A\varphi_n,\varphi_n)]^{\frac{1}{2}}(\mathrm{tr}\,A)^{\frac{1}{2}} \leq \mathrm{tr}\,A.$ ◇

定义 V.1.2 设 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，如果 $t_r|A| < +\infty$ ，称 A 是迹类算子．迹类算子之全体记为 $\mathcal{C}_1$.

定理 V.1.2 (1) $\mathcal{C}_1$ 是线性空间，且对任何 $A, B \in \mathcal{C}_1, \alpha \in \mathbb{C}$ 总有

$$\mathrm{tr}\,|A+B| \leq \mathrm{tr}\,|A| + \mathrm{tr}\,|B|$$
$$\mathrm{tr}\,|\alpha A| = |\alpha|\mathrm{tr}\,|A|.$$

(2) $\mathcal{C}_1$ 是 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的理想，即对任何 $A \in \mathcal{C}_1, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，总有 $TA, AT \in \mathcal{C}_1$.

(3) $\mathcal{C}_1$ 是自伴的，即对 $A \in \mathcal{C}_1$ ，必有 $A^* \in \mathcal{C}_1$ ，且 $\mathrm{tr}\,|A^*| = \mathrm{tr}\,|A|$.

为证明定理 V.1.2，我们需要如下引理.

引理 V.1.3 每个 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 可以表示为四个酉算子的线性组合.

证明 首先，令

$$T_R = \tfrac{1}{2}(T+T^*),\ T_I = \tfrac{1}{2i}(T-T^*)\ ,$$

则， $T_R,\ T_I$ 皆是自伴算子，而且

$$T = T_R + iT_I\ .$$

这说明每个 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 可以表示为两个自伴算子的线性组合．于是只须证明每个自伴算子可表示为两个酉算子的线性组合.

设 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 自伴，不失一般性可设 $\|A\| \leq 1$ ．考虑定义在 $[-1, 1]$ 上连续函数

$$\varphi_+(t) = t + i\sqrt{1-t^2},\ \varphi_-(t) = t - i\sqrt{1-t^2},\ t \in [-1,1]$$

显然

$$\overline{\varphi_+} = \varphi_-,\ \varphi_+(t)\varphi_-(t) = 1,\ \tfrac{1}{2}\varphi_+(t) + \tfrac{1}{2}\varphi_-(t) = t,\ t \in [-1,1].$$

由 A 之连续函数演算， $\varphi_+(A), \varphi_-(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，而且

$$[\varphi_+(A)]^* = \varphi_-(A),\ \varphi_+(A)\varphi_-(A) = I,\ \tfrac{1}{2}\varphi_+(A) + \tfrac{1}{2}\varphi_-(A) = A.$$

这表明 $\varphi_+(A), \varphi_-(A)$ 皆为酉算子，而且 A 是其线性组合. ◇

定理 V.1.2 **的证明** (1) 设 $A, B \in \mathcal{C}_1$ ，则 $\operatorname{tr}|A| < \infty, \operatorname{tr}|B| < \infty$ ，考虑 $A+B, A, B$ 之极分解

$$A + B = U|A+B|,\ A = V|A|,\ B = W|B|\ ,$$

这里 U, V, W 均是部分等距. 则 U^* 亦是部分等距，而且 U^*U 是 $\operatorname{Ran}|A+B|$ 上正交射影

$$|A+B| = U^*(A+B)\ .$$

于是对 $\mathcal{H}$ 的任意正规正交基 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ ，

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}|A+B| &= \sum_{n=1}^\infty (|A+B|\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=1}^\infty (U^*(A+B)\varphi_n, \varphi_n) \\ &\le \sum_{n=1}^\infty |(U^*A\varphi_n, \varphi_n)| + \sum_{n=1}^\infty |(U^*B\varphi_n, \varphi_n)| \\ &= \sum_{n=1}^\infty |(U^*V|A|\varphi_n, \varphi_n)| + \sum_{n=1}^\infty |(U^*W|B|\varphi_n, \varphi_n)| \\ &\le \operatorname{tr}|A| + \operatorname{tr}|B|.\end{aligned}$$

最后一个不等式用到命题 V.1.1 之 (e) ，可见 $A+B \in \mathcal{C}_1$. 又若 $\alpha \in \mathbb{C}$ ，由 $|\alpha A| = |\alpha|\,|A|$ ，及命题 V.1.1(b) 知

$$\operatorname{tr}|\alpha A| = |\alpha| \operatorname{tr}|A|\ .$$

可见 $\alpha A \in \mathcal{C}_1$.

(2) 若 $A \in \mathcal{C}_1, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，由引理 V.1.3 ， T 可以表示为四个酉算子之线性组合. 于是由 (1) 只须证对每个酉算子 $U, UA, AU \in \mathcal{C}_1$. 注意

$$(UA)^*(UA) = A^*U^*UA = A^*A\ ,$$

由正算子平方根唯一性， $|UA| = |A|$. 这样当 $A \in \mathcal{C}_1$ ，必有 $UA \in \mathcal{C}_1$. 又

$$(AU)^*(AU) = U^*A^*AU\ .$$

注意 $U^*|A|U$ 是正算子，且

$$(U^*|A|U)^2 = U^*|A|UU^*|A|U = U^*|A|^2U = U^*A^*AU\ .$$

同样由正算子平方根之唯一性，有 $|AU| = U^*|A|U$. 从而

$$\operatorname{tr}|AU| = \operatorname{tr} U^*|A|U = \operatorname{tr}|A|\ .$$

可见，当 $A \in \mathcal{C}_1$ 时必有 $AU \in \mathcal{C}_1$.

(3) 设 $A = U|A|$ 是 A 之极分解. 则 $A^* = |A|U^*,\ AA^* = U|A|^2U^*$. 注意 $U|A|U^* \ge 0$ ，而且

$$(U|A|U^*)^2 = U|A|U^*U|A|U^* = U|A|^2U^* = AA^*\ ,$$

所以 $|A^*| = U|A|U^*$. 故

$$\operatorname{tr}|A^*| = \operatorname{tr} U|A|U^* \le \operatorname{tr}|A|\ .$$

可见当 $A \in \mathcal{C}_1, A^* \in \mathcal{C}_1$ ，又由对称性，

$$\operatorname{tr}|A| = \operatorname{tr}|A^{**}| \le \operatorname{tr}|A^*|\ .$$

总之， $\operatorname{tr}|A^*| = \operatorname{tr}|A|$. ◇

引理 V.1.4 *设 $A \in \mathcal{C}_1$ ，则 A 是紧算子.*

证明 由定理 V.1.2 之 (2) ， $\mathcal{C}_1$ 是理想. 由 $A \in \mathcal{C}_1$ ，知 $A^*A \in \mathcal{C}_1$. 设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}$ 的

正规正交基，则

$$\mathrm{tr}\,(A^*A) = \sum_{n=1}^{\infty}(A^*A\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\|A\varphi_n\|^2 < +\infty.$$

对每个自然数 k ，定义线性算子 A_k 如下：

$$A_k\psi = \sum_{n=1}^{k}(\psi, \varphi_n)A\varphi_n,\ \forall\psi \in \mathcal{H}.$$

易见 A_k 是 $\mathcal{H}$ 上有限秩算子．注意 $\psi = \sum_{n=1}^{\infty}(\psi, \varphi_n)\varphi_n$ ，

$$A\psi = \sum_{n=1}^{\infty}(\psi, \varphi_n)A\varphi_n\ ,$$

则

$$\begin{aligned}\|A_k\psi - A\psi\| &= \|\sum_{n=k+1}^{\infty}(\psi, \varphi_n)A\varphi_n\| \le \sum_{n=k+1}^{\infty}|(\psi, \varphi_n)|\,\|A\varphi_n\| \\ &\le (\sum_{n=k+1}^{\infty}|(\psi, \varphi_n)|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{n=k+1}^{\infty}\|A\varphi_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|\psi\|(\sum_{n=k+1}^{\infty}\|A\varphi_n\|^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

可见当 $k \to \infty$ 时

$$\|A_k - A\| \le (\sum_{n=k+1}^{\infty}\|A\varphi_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

所以 A 是紧算子. ◇

引理 V.1.5 设 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是紧算子，则

$$\mathrm{tr}\,|A| = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\ ,$$

这里 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A 之奇异值，按重数重复排列， $\lambda_n \searrow 0$. 以后总这样假设，不再每次重复.

证明 由 A 是紧算子知 A^*A 是紧自伴算子．根据 Hilbert-Schmidt 定理，存在 $\mathcal{H}$ 之正规正交基 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使

$$A^*A\varphi_n = \lambda_n^2\varphi_n,\ n = 1, 2, \cdots.$$

其中 $\{\lambda_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A^*A 的全部特征值，按重数重复排列，且单调下降于 0 ．从而

$$|A|\varphi_n = \lambda_n\varphi_n,\ n = 1, 2, \cdots.$$

于是

$$\mathrm{tr}\,|A| = \sum_{n=1}^{\infty}(|A|\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n\varphi_n, \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n.$$ ◇

由引理 V.1.4 和引理 V.1.5 立即可得

定理 V.1.6 设 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，则 $T \in \mathcal{C}_1$ 当且仅当 T 是紧算子且 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty$ ，其中 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 T 之奇异值.

特别地，有限秩算子都属于 $\mathcal{C}_1$.

这个定理告诉我们在本章前言中给出的 $\mathcal{C}_1$ 的概念与定义 V.1.2 是一致的.

定理 V.1.7 对 $A \in \mathcal{C}_1$ ，令

$$\|A\|_1 = \mathrm{tr}\,|A|\ ,$$

则 $\|A\|_1$ 是 $\mathcal{C}_1$ 上范数， $\mathcal{C}_1$ 按 $\|\cdot\|_1$ 是一个 Banach 空间，而且

$$\|A\| \le \|A\|_1, \forall A \in \mathcal{C}_1\ .$$

证明 首先，由定理 V.1.2(1) 可知， $\|A\|_1$ 是 $\mathcal{C}_1$ 上的范数．往证

$$\|A\| \le \|A\|_1, \forall A \in \mathcal{C}_1 .$$

事实上，因 $|A|$ 是正算子，则

$$\|\,|A|\,\|^2 = \|\,|A|^2\,\| = \|A^*A\| = \|A\|^2 .$$

从而

$$\begin{aligned}\|A\| = \|\,|A|\,\| &= \|\,|A|^{\frac{1}{2}}\,\|^2 = \sup_{\|\varphi\|=1} \|\,|A|^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2 \\ &= \sup_{\|\varphi\|=1} (|A|\varphi, \varphi) \le \operatorname{tr}|A| = \|A\|_1.\end{aligned}$$

下面证 $\mathcal{C}_1$ 按 $\|\cdot\|_1$ 是 Banach 空间，只须证 $\mathcal{C}_1$ 按范数 $\|\cdot\|_1$ 是完备的. 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}_1$ 按 $\|\cdot\|_1$ 是 Cauchy 序列，即 $\|A_n - A_m\|_1 \to 0$，当 $n, m \to \infty$. 由已证可知，$\|A_n - A_m\| \to 0$，当 $n, m \to \infty$，即 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 中 Cauchy 序列. 于是存在 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，使 $\|A_n - A\| \to 0$，当 $n \to \infty$. 由命题 IV.2.4，$\|\,|A_n| - |A|\,\| \to 0$，当 $n \to \infty$.

首先证明 $A \in \mathcal{C}_1$. 因 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按 $\|\cdot\|_1$ 是 Cauchy 序列，故存在常数 $M > 0$，使得 $||A_n||_1 \le M,\ n = 1,\ 2,\ \cdots$. 设 $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是之正规正交基，则对任何自然数 N,

$$\sum_{m=1}^{N} (|A_n|\varphi_m, \varphi_m) \le \operatorname{tr}|A_n| = \|A_n\|_1 \le M.$$

令 $n \to \infty$，可得

$$\sum_{m=1}^{N} (|A|\varphi_m, \varphi_m) \le M .$$

再令 $N \to \infty$，可得

$$\operatorname{tr}|A| = \sum_{m=1}^{\infty} (|A|\varphi_m, \varphi_m) \le M .$$

故 $A \in \mathcal{C}_1$.

其次往证

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m=k}^{\infty} (|A_n - A|\varphi_m, \varphi_m) = 0$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 是一致的.

$\forall \varepsilon > 0$，由假设存在 $N \in \mathbb{N}$，使 $\|A_n - A_N\|_1 < \varepsilon$，当 $n \ge N$. 注意，对任意 $n \ge N$，总有表达式

$$A_n - A = A_n - A_N + A_N - A .$$

考虑极分解

$$A_n - A = U|A_n - A|,\ A_n - A_N = V|A_n - A_N|,\ A_N - A = W|A_N - A| .$$

其中 U, V, W 都是部分等距. 对正规正交系 $\{\varphi_m\}_{m=k}^{\infty}$，由命题 V.1.1(e)，

$$\begin{aligned} & \sum_{m=k}^{\infty} (|A_n - A|\varphi_m, \varphi_m) \\ = & \sum_{m=k}^{\infty} (U^*(A_n - A)\varphi_m, \varphi_m) \\ \le & \sum_{m=k}^{\infty} |(U^*(A_n - A_N)\varphi_m, \varphi_m)| + \sum_{m=k}^{\infty} |(U^*(A_N - A)\varphi_m, \varphi_m)| \\ \le & \sum_{m=k}^{\infty} |(U^*V|A_n - A_N|\varphi_m, \varphi_m)| + \sum_{m=k}^{\infty} |(U^*W|A_N - A|\varphi_m, \varphi_m)| \\ \le & \operatorname{tr}|A_n - A_N| + [\sum_{m=k}^{\infty} (|A_N - A|\varphi_m, \varphi_m)]^{\frac{1}{2}} (\operatorname{tr}|A_N - A|)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

注意 $A_N - A \in \mathcal{C}_1$, $\operatorname{tr}|A_N - A|$ 是常数，存在某个 $K_1 \in \mathbb{N}$，使当 $n \ge N$ 时，

$$[\sum_{m=k}^{\infty} (|A_N - A|\varphi_m, \varphi_m)]^{\frac{1}{2}} (\operatorname{tr}|A_N - A|)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon, \text{ 当 } k \ge K_1 .$$

从而

$$\sum_{m=k}^{\infty}|(|A_n-A|\varphi_m,\varphi_m)|<2\varepsilon\text{，当 } n\geq N,\, k\geq K_1 .$$

而当 $n\leq N$ ，存在 $K_2\in\mathbb{N}$ ，使当 $k\geq K_2$ 时，

$$\sum_{m=k}^{\infty}(|A_n-A|\varphi_m,\varphi_m)<2\varepsilon\text{，当 } n\leq N .$$

取 $K_0=\max\{K_1,\,K_2\}$ ，则对一切 n ，都有

$$\sum_{m=k}^{\infty}(|A_n-A|\varphi,\varphi)<2\varepsilon\text{，当 } k\geq K_0 .$$

最后往证，$\|A_n-A\|_1\to 0$ ，当 $n\to\infty$ 时．事实上，$\forall\varepsilon>0$ ，由前证，存在 $K\in\mathbb{N}$ ，使

$$\sum_{m=K+1}^{\infty}(|A_n-A|\varphi_m,\varphi_m)<\varepsilon\text{，对所有 } n\in\mathbb{N} .$$

对取定 K ，由 $\|A_n-A\|\to 0$ ，知 $\|\,|A_n-A|\,\|\to 0$ ．故存在 $N\in\mathbb{N}$ ，使当 $n\geq N$ 时，

$$\sum_{m=1}^{K}(|A_n-A|\varphi_m,\varphi_m)<\varepsilon .$$

于是，当 $n\geq N$ ，

$$\begin{aligned}\|A_n-A\|_1 &= \operatorname{tr}|A_n-A|=\sum_{m=1}^{\infty}(|A_n-A|\varphi_m,\varphi_m)\\ &= \sum_{m=1}^{K}(|A_n-A|\varphi_m,\varphi_m)+\sum_{m=K+1}^{\infty}(|A_n-A|\varphi_m,\varphi_m)\\ &< \varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

◇

注 $\mathcal{C}_1$ 在 $\|\cdot\|_1$ 范数下是闭的，但在 $\|\cdot\|$ 范数下不闭．设 $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的正规正交基，定义 A 为对角算子，而

$$A\varphi_m=\tfrac{1}{m}\varphi_m,\ m=1,2,\cdots.$$

易见 A 是正算子，而

$$\operatorname{tr}A=\sum_{m=1}^{\infty}(A\varphi_m,\ \varphi_m)=\sum_{m=1}^{\infty}\tfrac{1}{m}=+\infty\text{，}$$

即 $A\notin\mathcal{C}_1$ ．对每个自然数 n ，令

$$A_n\varphi_m=\begin{cases}\frac{1}{m}\varphi_m, & \text{当} m\leq n\\ 0, & \text{当} m>n\end{cases}$$

则 A_n 是 n 秩算子，故 $A_n\in\mathcal{C}_1$ ．显然

$$\|A-A_n\|=\tfrac{1}{n+1}\to 0\text{，当 } n\to\infty .$$

这说明 $\mathcal{C}_1$ 按 $\|\cdot\|$ 不闭.

命题 V.1.8 设 $A\in\mathcal{C}_1$ ，则对 $\mathcal{H}$ 中任意正规正交基 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A\varphi_n,\varphi_n)$ 绝对收敛，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(A\varphi_n,\varphi_n)|\leq\operatorname{tr}|A|=\|A\|_1\text{，}$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A\varphi_n,\varphi_n)$ 之和与所取基底无关.

证明 设 $A=U|A|$ 是 A 之极分解，这里 U 是部分等距．由命题 V.1.1(e)，其中 $V=I$ ，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(A\varphi_n,\varphi_n)|=\sum_{n=1}^{\infty}|(U|A|\varphi_n,\varphi_n)|\leq\operatorname{tr}|A|<+\infty.$$

设 $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的另一个正规正交基，则

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|(|A|^{\frac12}\psi_k,\varphi_n)\overline{(|A|^{\frac12}U^*\psi_k,\varphi_n)}|\\
\le\ &\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty}|(|A|^{\frac12}\psi_k,\varphi_n)|^2)^{\frac12}(\sum_{n=1}^{\infty}|(|A|^{\frac12}U^*\psi_k,\varphi_n)|^2)^{\frac12}\\
=\ &\sum_{k=1}^{\infty}\|\,|A|^{\frac12}\psi_k\|\,\|\,|A|^{\frac12}U^*\psi_k\|\\
\le\ &(\sum_{k=1}^{\infty}\|\,|A|^{\frac12}\psi_k\|^2)^{\frac12}(\sum_{k=1}^{\infty}\|\,|A|^{\frac12}U^*\psi_k\|^2)^{\frac12}\\
=\ &[\sum_{k=1}^{\infty}(|A|\psi_k,\psi_k)]^{\frac12}[\sum_{k=1}^{\infty}(U|A|U^*\psi_k,\psi_k)]^{\frac12}\\
=\ &(\mathrm{tr}\,|A|)^{\frac12}(\mathrm{tr}\,U|A|U^*)^{\frac12}\le \mathrm{tr}\,|A|<+\infty.
\end{aligned}$$

这说明级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|A|^{\frac12}\psi_k,\varphi_n)\overline{(|A|^{\frac12}U^*\psi_k,\varphi_n)}$ 是绝对收敛的，于是可以交换求和顺序．这样

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}(A\psi_k,\psi_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(U|A|\psi_k,\psi_k)\\
=\ &\sum_{k=1}^{\infty}(|A|^{\frac12}\psi_k,|A|^{\frac12}U^*\psi_k)\\
=\ &\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(|A|^{\frac12}\psi_k,\varphi_n)\overline{(|A|^{\frac12}U^*\psi_k,\varphi_n)}\\
=\ &\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(|A|^{\frac12}\psi_k,\varphi_n)\overline{(|A|^{\frac12}U^*\psi_k,\varphi_n)}\\
=\ &\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(U|A|^{\frac12}\varphi_n,\psi_k)\overline{(|A|^{\frac12}\varphi_n,\psi_k)}\\
=\ &\sum_{n=1}^{\infty}(U|A|^{\frac12}\varphi_n,|A|^{\frac12}\varphi_n).
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}|(U|A|^{\frac12}\varphi_n,|A|^{\frac12}\varphi_n)|\\
\le\ &\sum_{n=1}^{\infty}\|U|A|^{\frac12}\varphi_n\|\,\|\,|A|^{\frac12}\varphi_n\|\\
\le\ &\sum_{n=1}^{\infty}\|\,|A|^{\frac12}\varphi_n\|^{\frac12}\\
=\ &\mathrm{tr}\,|A|<+\infty.
\end{aligned}$$

说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(U|A|^{\frac12}\varphi_n,|A|^{\frac12}\varphi_n)|$ 收敛，从而是一个与 $\{\psi_k\}$ 无关的常数． ◇

定义 V.1.3 设 $A\in\mathcal{C}_1$，称

$$\mathrm{tr}\,A=\sum_{n=1}^{\infty}(A\varphi_n,\varphi_n)$$

为 A 之迹(trace)，其中 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的任意一个正规正交基.

定理 V.1.9 $\mathrm{tr}:A\longmapsto \mathrm{tr}\,A$ 是 Banach 空间 $<\mathcal{C}_1,\|\cdot\|_1>$ 上的连续线性泛函，且 $\|\mathrm{tr}\,\|=1$, $\mathrm{tr}\,A^*=\overline{\mathrm{tr}\,A}$, $\forall A\in\mathcal{C}_1$．

证明 设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的正规正交基，$\forall A,B\in\mathcal{C}_1,\lambda\in\mathbb{C}$，有 $A+B,\lambda A\in\mathcal{C}_1$，且

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,(A+B)\ &=\sum_{n=1}^{\infty}((A+B)\varphi_n,\varphi_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(A\varphi_n,\varphi_n)+\sum_{n=1}^{\infty}(B\varphi_n,\varphi_n)\\
&=\mathrm{tr}\,A+\mathrm{tr}\,B,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}\,(\lambda A)=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda A\varphi_n,\varphi_n)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}(A\varphi_n,\varphi_n)=\lambda\mathrm{tr}\,A\ .$$

可见 $\mathrm{tr}\,(\cdot)$ 是 $\mathcal{C}_1$ 上线性泛函．又

$$|\mathrm{tr}\, A| = |\sum_{n=1}^{\infty}(A\varphi_n,\varphi_n)| \le \sum_{n=1}^{\infty}|(A\varphi_n,\varphi_n)| \le \|A\|_1.$$

故 $\mathrm{tr}\,(\cdot)$ 是 $\mathcal{C}_1$ 上连续线性泛函，而且 $\|\mathrm{tr}\,\| \le 1$.

另一方面，设 $A\in\mathcal{C}_1$ ， A 之极分解为 $A=U|A|$ ，由 $\mathcal{C}_1$ 是理想可知 $|A|=U^*A\in\mathcal{C}_1$. 而 $\mathrm{tr}\,|A| = \|\,|A|\,\|_1$. 故 $\|\mathrm{tr}\,\|=1$.

设 $A\in\mathcal{C}_1$ ，由定理 V.1.2, $A^*\in\mathcal{C}_1$. 而

$$\mathrm{tr}\, A^* = \sum_{n=1}^{\infty}(A^*\varphi_n,\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n, A\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{(A\varphi_n,\varphi_n)} = \overline{\mathrm{tr}\, A}\ . \qquad \diamond$$

前面已经证明有限秩算子都在 $\mathcal{C}_1$ 中，下面将证明全体有限秩算子在 $\mathcal{C}_1$ 中按照 $\|\cdot\|_1$ 稠密. 为此先考虑一秩算子.

设 $\varphi,\psi\in\mathcal{H}$ 是非零元，用 $\varphi\otimes\psi$ 表示如下定义的一秩算子

$$\varphi\otimes\psi(f) = (f,\psi)\varphi,\ \forall f\in\mathcal{H}\ .$$

命题 V.1.10 (a) 当 $\|\varphi\|=1$ 时 $\varphi\otimes\varphi$ 是 $\mathcal{H}$ 到一维子空间 $\mathrm{Span}\{\varphi\}$ 的正交射影.

(b) $[\varphi\otimes\psi]* = \psi\otimes\varphi$.

(c) $(\varphi_1\otimes\psi_1)\cdot(\varphi_2\otimes\psi_2) = (\varphi_2,\psi_1)\varphi_1\otimes\psi_2$.

(d) $(\lambda\varphi)\otimes\psi = \lambda(\varphi\otimes\psi),\ \varphi\otimes(\lambda\psi) = \bar{\lambda}(\varphi\otimes\psi)$.

(e) $(A\varphi)\otimes\psi = A(\varphi\otimes\psi),\ \varphi\otimes(A\psi) = (\varphi\otimes\psi)A^*$.

(f) $\mathrm{tr}\,(\varphi\otimes\psi) = (\varphi,\psi)$.

(g) $\|\varphi\otimes\psi\|_1 = \|\varphi\otimes\psi\| = \|\varphi\|\,\|\psi\|$.

对任意的 $\varphi,\psi,\varphi_i,\psi_i\in\mathcal{H},\ i=1,2,\ A\in\mathcal{L}(\mathcal{H}),\ \lambda\in\mathbb{C}$.

证明是简单的，留作习题.

命题 V.1.11 $\mathcal{H}$ 上的任何一秩算子都可表成 $\varphi\otimes\psi$ 的形式，对某个 $\varphi,\psi\in\mathcal{H}$.

证明 设 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是一秩算子，则 $\dim R(T)=1$. 取定 $\varphi\in R(T), \varphi\neq 0$. 则必有 $g\in\mathcal{H}$ ，使 $Tg=\varphi$. 因 $N(T)$ 是闭子空间，存在分解

$$\mathcal{H} = N(T)\oplus N(T)^\perp\ .$$

令

$$g = g_0+\psi,\ g_0\in N(T),\ \psi\in N(T)^\perp\ .$$

则

$$\varphi = Tg = T\psi\ .$$

不失一般性，可设 $\|\psi\|=1$. 否则，以 $\frac{\varphi}{\|\varphi\|}, \frac{\psi}{\|\psi\|}$ 分别代替 φ,ψ 即可. 则 $\forall f\in\mathcal{H}, Tf\in R(T)$. 因 $\dim R(T)=1$ ，于是存在常数 $\alpha\in\mathbb{C}$ ，使 $Tf=\alpha\varphi=\alpha T\psi$ ，即 $f-\alpha\psi\in N(T)$. 这样

$$0 = (f-\alpha\psi,\psi) = (f,\psi)-\alpha(\psi,\psi) = (f,\psi)-\alpha\ .$$

于是

$$Tf = \alpha\varphi = (f,\psi)\varphi = \varphi\otimes\psi(f)\ . \qquad \diamond$$

定理 V.1.12 全体有限秩算子集合 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{C}_1$ 中按范数 $\|\cdot\|_1$ 是稠密的.

证明 设 $A\in\mathcal{C}_1$ ，由定理 V.1.6， A 是紧算子，而且

$$\mathrm{tr}\,|A| = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < +\infty\ ,$$

这里 $\{\lambda\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A 之奇异值，亦即 $|A|$ 的全部特征值. 由 Hilbert-Schmidt 定理，存在 $\mathcal{H}$ 的正规正交基 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，使 $|A|\varphi_n = \lambda_n\varphi_n,\ n=1,2,\cdots$ ，即

$$|A|\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\varphi, \varphi_n)\varphi_n, \forall \varphi \in \mathcal{H} .$$

设 A 之极分解为 $A = U|A|, U$ 是部分等距. 由 $N(U) = N(|A|)$ 可知, 当 $\lambda_n = 0$, $|A|\varphi_n = 0$, 从而 $U\varphi_n = 0$. 若 $\lambda_n \neq 0$, 则 $\varphi_n \perp N(|A|)(= N(U))$, $\|U\varphi_n\| = \|\varphi_n\| = 1$. 即 $\{U\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中全体非零者仍是 $\mathcal{H}$ 的正规正交系. 令 $\psi_n = U\varphi_n, n = 1, 2, \cdots$, 则对 $\forall \varphi \in \mathcal{H}$

$$A\varphi = U|A|\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\varphi, \varphi_n)U\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\varphi, \varphi_n)\psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\psi_n \otimes \varphi_n(\varphi) .$$

即

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\psi_n \otimes \varphi_n ,$$

右端级数是按 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 中范数收敛的. 对每个 $K \in \mathbb{N}$, 令

$$A_K = \sum_{n=1}^{K} \lambda_n\psi_n \otimes \varphi_n ,$$

则 A_K 都是有限秩算子, 而当 $K \to 0$ 时

$$\begin{aligned} \|A - A_K\|_1 &= \|\sum_{n=K+1}^{\infty} \lambda_n\psi_n \otimes \varphi_n\|_1 \leq \sum_{n=K+1}^{\infty} \|\lambda_n\psi_n \otimes \varphi_n\|_1 \\ &= \sum_{n=K+1}^{\infty} \lambda_n\|\varphi_n\| \, \|\psi_n\| = \sum_{n=K+1}^{\infty} \lambda_n \to 0. \end{aligned}$$

所以 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{C}_1$ 中按 $\|\cdot\|_1$ 稠密. ◇

V.2 Hilbert-Schmidt 算子

定义 V.2.1 设 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,若 A^*A 是迹类算子,即 $\mathrm{tr}\,(A^*A) < +\infty$,称 A 是 Hilbert-Schmidt 类算子, 记为 $A \in \mathcal{C}_2$.

对 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, 引进记号

$$\|A\|_2 = (\mathrm{tr}\,(A^*A))^{\frac{1}{2}} ,$$

则 $A \in \mathcal{C}_2$ 当且仅当 $\|A\|_2 < +\infty$. 可以证明, 对 $\mathcal{H}$ 之任意正规正交基 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\|A\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \| \, |A|\varphi_n\|^2 .$$

命题 V.2.1 设 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, 则

(a) 对任何酉算子 U , $\|A\|_2 = \|U^*AU\|_2$.

(b) 对任意正规正交基 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\|A\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |(A\varphi_n, \varphi_m)|^2 .$$

(c) $\|A^*\|_2 = \|A\|_2$.

(d) $\|A\| \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1$.

证明 (a) 设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的正规正交基, U 是酉算子, 则 $\{U\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是 $\mathcal{H}$ 的正规正交基, 于是

$$\|U^*AU\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|U^*AU\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|AU\varphi_n\|^2 = \|A\|_2^2 .$$

(b) 由于 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的正规正交基,

$$\|A\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |(A\varphi_n, \varphi_m)|^2 .$$

(c) 设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 正规正交基, 由 (b)

$$\begin{aligned}\|A^*\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|(A^*\varphi_n,\varphi_m)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|(\varphi_n,A\varphi_m)|^2\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|(A\varphi_m,\varphi_n)|^2 = \|A\|_2^2.\end{aligned}$$

(d) 设 $\varphi\in\mathcal{H}$，$\|\varphi\|=1$，可取 $\mathcal{H}$ 正规正交基 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$，使 $\varphi_1=\varphi$．于是

$$\|A\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\|A\varphi_n\|^2 \geq \|A\varphi_1\|^2 = \|A\varphi\|^2 .$$

即 $\|A\varphi\|\leq\|A\|_2$，从而 $\|A\| = \sup\limits_{\|\varphi\|=1}\|A\varphi\| \leq \|A\|_2$.

设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的正规正交基，则

$$\begin{aligned}\|A\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\|\,|A|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|(|A|\varphi_n,\varphi_m)|^2\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|(|A|^{\frac12}\varphi_n,|A|^{\frac12}\varphi_m)|^2\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\|\,|A|^{\frac12}\varphi_n\|^2\|\,|A|^{\frac12}\varphi_m\|^2\\ &= (\sum_{n=1}^{\infty}\|\,|A|^{\frac12}\varphi_n\|^2)(\sum_{m=1}^{\infty}\|\,|A|^{\frac12}\varphi_m\|^2)\\ &= \mathrm{tr}\,|A|\cdot\mathrm{tr}\,|A| = \|A\|_1^2.\end{aligned}$$

故 $\|A\|_2\leq\|A\|_1$. ◇

定理 V.2.2 $\mathcal{C}_2$ 按 $\|\cdot\|_2$ 是一个 Banach 空间.

证明 设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的正规正交基，则

$$\begin{aligned}\|A+B\|_2 &= (\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|((A+B)\varphi_n,\varphi_m)|^2)^{\frac12}\\ &\leq (\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}[|(A\varphi_n,\varphi_m)|+|(B\varphi_n,\varphi_m)|]^2)^{\frac12}\\ &\leq (\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|(A\varphi_n,\varphi_m)|^2)^{\frac12}+(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|(B\varphi_n,\varphi_m)|^2)^{\frac12}\\ &= \|A\|_2+\|B\|_2,\end{aligned}$$

$$\|\lambda A\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty}\|\lambda A\varphi_n\|^2)^{\frac12} = |\lambda|(\sum_{n=1}^{\infty}\|A\varphi_n\|^2)^{\frac12} = |\lambda|\|A\|_2 ,$$

对任何 $A, B\in\mathcal{L}(\mathcal{H}), \lambda\in\mathbb{C}$.

以上证明 $\mathcal{C}_2$ 是线性空间，而且 $\|\cdot\|_2$ 是 $\mathcal{C}_2$ 的范数，而 $<\mathcal{C}_2,\|\cdot\|_2>$ 之完备性的证明与第一节中的定理 V.1.7 $<\mathcal{C}_1,\|\cdot\|_1>$ 的完备性的证明是类似的．这里不再赘述. ◇

引理 V.2.3 设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是紧算子，$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A 之奇异值，则

$$\|A\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 .$$

证明 由于 A^*A 是紧自伴算子，$\{\lambda_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A^*A 之全部特征值，按重数重复排列，存在 $\mathcal{H}$ 之正规正交基 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使

$$A^*A\varphi_n = \lambda_n^2\varphi_n,\ n=1,2,\cdots .$$

于是

$$\|A\|_2^2 = \mathrm{tr}\,(A^*A) = \sum_{n=1}^{\infty}(A^*A\varphi_n,\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 .$$ ◇

定理 V.2.4 设 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$，则 $A\in\mathcal{C}_2$ 当且仅当 A 是紧算子，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2<+\infty$，其中 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 A 之奇异值．特别地，有限秩算子都在 $\mathcal{C}_2$ 中.

证明 由引理 V.2.3 只须证必要性.

设 $A \in \mathcal{C}_2$，则 $A^*A \in \mathcal{C}_1$．由第一节定理 V.1.6， A^*A 是紧算子，且

$$\operatorname{tr}(A^*A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty .$$

于是 $|A|$ 是紧算子，从而 $A = U|A|$ 亦是紧算子. ◇

定理证明中用到如下论断 (其证明作为练习题)：

设 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 是紧算子， $A \geq 0$，则 $A^{\frac{1}{2}}$ 也是紧算子.

定理 V.2.5 全体有限秩算子 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{C}_2$ 中按 $\|\cdot\|_2$ 稠密.

证明 设 $A \in \mathcal{C}_2, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 正规正交基，则

$$\|A\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A\varphi_n\|^2 < +\infty .$$

对每个 $N \in \mathbb{N}$，定义 $\mathcal{H}$ 上线性算子 A_N 如下：

$$A_N\varphi_n = \begin{cases} A\varphi_n, & n \leq N, \\ 0, & n > N, \end{cases}$$

则 A_N 是有限秩算子，且当 $N \to \infty$．

$$\|A - A_N\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|(A - A_N)\varphi_n\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|A\varphi_n\|^2 \to 0 .$$ ◇

由定理 V.2.4，命题 V.2.1 我们知道

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{K}(\mathcal{H}) ,$$

这里 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上全体紧算子集合. 容易举出例子说明上述每个包含关系都是真包含.

例 V.2.1 设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的正规正交基，令

$$A\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi_n, \; n = 1, 2, \cdots.$$

$$B\varphi_n = \frac{1}{n}\varphi_n, \; n = 1, 2, \cdots.$$

则 $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，易证 $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$．但是 $A \notin \mathcal{C}_2$．而 $B \in \mathcal{C}_2$，但是 $B \notin \mathcal{C}_1$．

定理 V.2.6 (a) 设 $A \in \mathcal{C}_2, \; T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$．则 $TA, \; AT \in C_2$．而且

$$\|TA\|_2 \leq \|T\|\|A\|_2, \; \|AT\|_2 \leq \|T\|\|A\|_2 .$$

因而 $\mathcal{C}_2$ 是 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的一个双边理想.

(b) 若 $A, B \in \mathcal{C}_2$，则 $AB \in \mathcal{C}_2$，且

$$\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2 .$$

特别地，对任意自然数 n

$$\|A^n\|_2 \leq \|A\|_2^n .$$

证明 (a) 设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的正规正交基，则

$$\|TA\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|TA\varphi_n\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T\|^2\|A\varphi_n\|^2 = \|T\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|A\varphi_n\|^2 = \|T\|^2\|A\|_2^2.$$

可见 $\|TA\|_2 \leq \|T\|\|A\|_2$．由命题 V.2.1 之 (c) 及已证可得,

$$\|AT\|_2 = \|(AT)^*\|_2 = \|T^*A^*\|_2 \leq \|T^*\|\|A^*\|_2 = \|T\|\|A\|_2 .$$

(b) 由 (a) 及命题 V.2.1(d) 可得. ◇

定理 V.2.7 设 $A, B \in \mathcal{C}_2$，则 $AB \in \mathcal{C}_1$，且

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_2 \, \|B\|_2 .$$

证明 设 AB 之极分解为 $AB = U|AB|$，其中 U 是部分等距，则 $|AB| = U^*AB$．对 $\mathcal{H}$ 之任意正规正交基 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$，

$$\begin{aligned}\|AB\|_1 &= \operatorname{tr}|AB| = \sum_{n=1}^{\infty}(|AB|\varphi_n,\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(U^*AB\varphi_n,\varphi_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(B\varphi_n, A^*U\varphi_n) \le \sum_{n=1}^{\infty}\|B\varphi_n\|\,\|A^*U\varphi_n\|\\ &\le (\sum_{n=1}^{\infty}\|B\varphi_n\|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{n=1}^{\infty}\|A^*U\varphi_n\|^2)^{\frac{1}{2}}\\ &= \|B\|_2\|A^*U\|_2\\ &\le \|B\|_2\|A^*\|_2\|U\|\\ &\le \|A\|_2\|B\|_2.\end{aligned}$$

◇

定理 V.2.8 *在 $\mathcal{C}_2$ 中定义*

$$(A,B) = \operatorname{tr}(B^*A),\ \forall A,\ B \in \mathcal{C}_2\ .$$

则 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathcal{C}_2$ 的内积，而且按照这个内积，$\mathcal{C}_2$ 是一个 Hilbert 空间.

证明 显然对任何 $A \in \mathcal{C}_2$，

$$(A,A) = \operatorname{tr}(A^*A) = \|A\|_2^2\ .$$

根据定理 V.2.2，$\mathcal{C}_2$ 按 $\|\cdot\|_2$ 是完备的，故只须验证 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathcal{C}_2$ 上内积.

(i) $(A,\ A) \ge 0$ 且 $A = 0 \Leftrightarrow (A,\ A) = 0$ 是显然的.

(i) 由定理 V.2.7 及第一节定理 V.1.9，

$$\begin{aligned}(A_1 + A_2,\ B) &= \operatorname{tr}[B^*(A_1+A_2)] = \operatorname{tr}(B^*A_1 + B^*A_2)\\ &= \operatorname{tr}(B^*A_1) + \operatorname{tr}(B^*A_2) = (A_1,\ B) + (A_2,\ B).\end{aligned}$$

(iii) 同样，由第一节定理 V.1.9，对任何 $\alpha \in \mathbb{C}$，

$$(\alpha A,\ B) = \operatorname{tr}[B^*(\alpha A)] = \alpha\operatorname{tr}(B^*A) = \alpha(A,\ B)\ .$$

(iv) 由第一节定理 V.1.9，

$$\overline{(A,\ B)} = \overline{\operatorname{tr}(B^*A)} = \operatorname{tr}(B^*A)^* = \operatorname{tr}(A^*B) = (B,\ A)\ .$$

◇

注意，由定理 V.2.6，$\mathcal{C}_2$ 还是一个代数，且 $\|AB\|_2 \le \|A\|_2\|B\|_2, \forall A, B \in \mathcal{C}_2$．事实上，$< \mathcal{C}_2, \|\cdot\|_2 >$ 是一个典型的 Hilbert 代数.

V.3 $\mathcal{C}_p$ 类算子空间的对偶

在本科泛函分析中大家已经知道

$$(c_0)^* \cong l^1 \subset l^2 \subset c_0 \subset l^\infty \cong (l^1)^*\ ,$$

这里 c_0 表示收敛于 0 的数列的全体作成的 Banach 空间．上述的包含关系仅仅是指集合的包含．对 $\mathcal{C}_p$ 类算子我们将得到类似的结果，即

$$[\mathcal{K}(\mathcal{H})]^* \cong \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}) \cong (\mathcal{C}_1)^*\ .$$

这里 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上全体紧算子集合，它是 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的一个双边理想.

命题 V.3.1 *设 $A \in \mathcal{C}_1, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，则*

$$\operatorname{tr}(AT) = \operatorname{tr}(TA)\ .$$

证明 因为任给 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 可以表示称为四个酉算子的线性组合，而 $\operatorname{tr}(\cdot)$ 又是 $\mathcal{C}_1$ 上的线性泛函，于是只须对 T 是酉算子证明等式成立.

设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 之正规正交基，则 $\{T\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 亦是 $\mathcal{H}$ 的正规正交基. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(TA) &= \sum_{n=1}^{\infty}(TAT\varphi_n, T\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(T^*TAT\varphi_n, \varphi_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(AT\varphi_n, \varphi_n) = \mathrm{tr}\,(AT).\end{aligned}$$

◇

引理 V.3.2 设 $A \in \mathcal{C}_1$，则 $|A|^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}_2$，而且

$$\|A\|_1 = \|\,|A|^{\frac{1}{2}}\|_2^2 .$$

证明 设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 之正规正交基，则

$$\begin{aligned}\|\,|A|^{\frac{1}{2}}\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\|\,|A|^{\frac{1}{2}}\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(|A|^{\frac{1}{2}}\varphi_n, |A|^{\frac{1}{2}}\varphi_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(|A|\varphi_n, \varphi_n) = \mathrm{tr}\,|A| = \|A\|_1.\end{aligned}$$

◇

命题 V.3.3 设 $A \in \mathcal{C}_1, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，则

$$\|TA\|_1 \le \|T\|\,\|A\|_1, \quad \|AT\|_1 \le \|T\|\,\|A\|_1 .$$

证明 考虑 A 及 TA 之极分解， $A = U|A|, TA = V|TA|$，其中 U, V 是部分等距. 那么 $|TA| = V^*TA = V^*TU|A|$. 设 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 之正规正交基. 由引理 V.3.2，$|A|^{\frac{1}{2}}, |A|^{\frac{1}{2}}U^*T^*V \in \mathcal{C}_2$. 于是

$$\begin{aligned}\|TA\|_1 &= \mathrm{tr}\,|TA| = \sum_{n=1}^{\infty}(|TA|\varphi_n, \varphi_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(V^*TU|A|\varphi_n, \varphi_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(|A|^{\frac{1}{2}}\varphi_n, |A|^{\frac{1}{2}}U^*T^*V\varphi_n)\\ &\le (\sum_{n=1}^{\infty}\|A|^{\frac{1}{2}}\varphi_n\|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{n=1}^{\infty}\|A|^{\frac{1}{2}}U^*T^*V\varphi_n\|^2)^{\frac{1}{2}}\\ &= \|\,|A|^{\frac{1}{2}}\|_2\|\,|A|^{\frac{1}{2}}U^*T^*V\|_2\\ &\le \|\,|A|^{\frac{1}{2}}\|_2\|\,|A|^{\frac{1}{2}}\|_2\|U^*T^*V\|\\ &\le \|\,|A|^{\frac{1}{2}}\|_2^2\|U^*\|\,\|T^*\|\,\|V\| = \|A\|_1\|T\|.\end{aligned}$$

进而， $\|AT\|_1 = \|(AT)^*\|_1 = \|T^*A^*\|_1 \le \|T^*\|\|A^*\|_1 = \|T\|\|A\|_1$. ◇

取定 $A \in \mathcal{C}_1$，定义

$$l_A(T) = \mathrm{tr}\,(AT), \forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) .$$

则 l_A 是 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上线性泛函，而且

$$|l_A(T)| = |\mathrm{tr}\,(AT)| \le \|AT\|_1 \le \|A\|_1\|T\| .$$

可见 l_A 是 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上连续线性泛函，且 $\|l_A\| \le \|A\|_1$. 这样我们得到如下结果:

定理 V.3.4 对 $A \in \mathcal{C}_1$，

$$l_A(T) = \mathrm{tr}\,(AT), \ \forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \tag{3.1}$$

是 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上连续线性泛函，且 $\|l_A\| \le \|A\|_1$.

$\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的闭子空间，于是 l_A 在 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 上限制 $\widetilde{l}_A$:

$$\widetilde{l}_A(C) = \mathrm{tr}\,(AC), \ \forall C \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \tag{3.2}$$

是 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 上连续线性泛函. 如果 $\mathcal{H}$ 是无穷维 Hilbert 空间， $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上连续线性泛函并非都是形如 (3.1) 者，而 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 上连续线性泛函都是形如 (3.2) 者.

引理 V.3.5 设 $A\in\mathcal{C}_1$ ，则

$$\|A\|_1=\|\widetilde{l}_A\|=\sup\{|\mathrm{tr}\,(AC)|;C\in\mathcal{K}(\mathcal{H}),\|C\|\le 1\}\ .$$

证明 由定理 V.3.4 ， $\|\widetilde{l}_A\|\le\|A\|_1$ ．反之，设 $A=U|A|$ 是 A 之极分解， U 是部分等距，$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 之正规正交基，则 $\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_j\otimes\varphi_j$ 是 $\mathcal{H}$ 到子空间 $\mathrm{Span}\{\varphi,\cdots,\varphi_n\}$ 上的正交射影．于是 $(\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_j\otimes\varphi_j)U^*$ 是有限秩算子，且 $\|(\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_j\otimes\varphi_j)U^*\|\le 1$ ．故

$$\begin{aligned}\|\widetilde{l}_A\| &\ge |\widetilde{l}_A([\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\otimes\varphi_j]U^*)|\\ &=|\mathrm{tr}\,[(\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\otimes\varphi_j)U^*A]|\\ &=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{tr}\,[(\varphi_j\otimes\varphi_j)|A|]\\ &=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{tr}\,[|A|(\varphi_j\otimes\varphi_j)]\\ &=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{tr}\,[(|A|\varphi_j)\otimes\varphi_j]\\ &=\sum_{j=1}^{n}(|A|\varphi_j,\varphi_j).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ ，可见 $\|\widetilde{l}_A\|\ge\sum\limits_{j=1}^{\infty}(|A|\varphi_j,\varphi_j)=\|A\|_1$ ． ◇

定义映射 $\rho:\mathcal{C}_1\to[\mathcal{K}(\mathcal{H})]^*$ 为

$$\rho:\ A\to\widetilde{l}_A,\ \forall A\in\mathcal{C}_1\ .$$

易见这是一个线性映射．进而有下面定理．

定理 V.3.6 映射 $\rho:\ A\to\widetilde{l}_A$ 是 $\mathcal{C}_1$ 到 $[\mathcal{K}(\mathcal{H})]^*$ 上的等距同构，即 $[\mathcal{K}(\mathcal{H})]^*\cong\mathcal{C}_1$ ．

证明 由前述只须证明 ρ 是满射的．设 $l\in[\mathcal{K}(\mathcal{H})]^*$ ，令

$$\Phi(f,\,g)=l(f\otimes g),\forall f,\,g\in\mathcal{H}\ .$$

易证 Φ 是 $\mathcal{H}$ 上共轭双线性泛函，且

$$|\Phi(f,\,g)|=|l(f\otimes g)|\le\|l\|\,\|f\|\,\|g\|\ ,$$

即 Φ 是有界的．故存在 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，使

$$\Phi_(f,g)=(Af,\,g),\forall f,g\in\mathcal{H}\ ,$$

即

$$l(f\otimes g)=(Af,\,g)=\mathrm{tr}\,[(Af)\otimes g]=\mathrm{tr}\,[A(f\otimes g)],\forall f,\,g\in\mathcal{H}\ .$$

设 F 使有限秩算子，则 F 可以表成几个一秩算子之和．再由第一节命题 V.1.11 ， F 可表示成 $F=\sum\limits_{j=1}^{n}f_j\otimes g_j,f_j,\,g_j\in\mathcal{H},j=1,\cdots,n$ ．由上式可得

$$l(F)=\sum_{j=1}^{n}l(f_j\otimes g_j)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{tr}\,(Af_j\otimes g_j)=tr(A\sum_{j=1}^{n}f_j\otimes g_j)=\mathrm{tr}\,(AF)\ .$$

往证 $A\in\mathcal{C}_1$ ．设 $A=U|A|$ 是 A 之极分解， $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的正规正交基．对任何 $K\in\mathbb{N}$ ， $[\sum\limits_{j=1}^{K}\varphi_j\otimes\varphi_j]U^*$ 是有限秩算子，且

$$\|[\sum_{j=1}^{K}\varphi_j\otimes\varphi_j]U^*\|\le\|\sum_{j=1}^{K}\varphi_j\otimes\varphi_j\|\,\|U^*\|\le 1\ .$$

于是

$$\begin{aligned}\|l\| &\ge |l([\sum_{j=1}^{K}\varphi_j\otimes\varphi_j]U^*)| = |\mathrm{tr}\,(A[\sum_{j=1}^{K}\varphi_j\otimes\varphi_j]U^*)| \\ &= |\mathrm{tr}\,([\sum_{j=1}^{K}\varphi_j\otimes\varphi_j]U^*A)| = |\mathrm{tr}\,([\sum_{j=1}^{K}\varphi_j\otimes\varphi_j]|A|)| \\ &= \mathrm{tr}\,[\sum_{j=1}^{K}|A|(\varphi_j\otimes\varphi_j)] = \mathrm{tr}\,[\sum_{j=1}^{K}(|A|\varphi_j)\otimes\varphi_j] \\ &= \sum_{j=1}^{K}\mathrm{tr}\,[(|A|\varphi_j)\otimes\varphi_j] = \sum_{j=1}^{K}(|A|\varphi_j,\varphi_j).\end{aligned}$$

令 $K\to\infty$，可见

$$\|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty}(|A|\varphi_j,\varphi_j) \le \|l\|\ .$$

即 $A\in\mathcal{C}_1$. 于是

$$l(F) = \mathrm{tr}\,(AF) = \widetilde{l}_A(F), \forall F\in\mathcal{F}\ .$$

已知全体有限秩算子 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 中按算子范数稠密，故 $l=\widetilde{l}_A$. ◇

对固定 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$，定义

$$F_T(A) = \mathrm{tr}\,(TA), \forall A\in\mathcal{C}_1\ .$$

显然，F_T 是 $<\mathcal{C}_1,\|\cdot\|_1>$ 上连续线性泛函. 事实上，还有下面结论成立.

引理 V.3.7 $\|F_T\| = \|T\|$.

证明 首先，由命题 V.3.3，

$$|F_T(A)| = |\mathrm{tr}\,(TA)| \le \|TA\|_1 \le \|T\|\|A\|_1\ ,$$

故 $\|F_T\|\le\|T\|$.

另一方面，$\forall f\in\mathcal{H}, \|f\|=1$，若 $Tf\ne 0$，取 $g=\frac{Tf}{\|Tf\|}$，则 $\|g\|=1$. 而 $f\otimes g\in\mathcal{C}_1$，且 $\|f\otimes g\|_1 = \|f\|\,\|g\| = 1$. 从而

$$\begin{aligned}\|F_T\| &\ge |F_T(f\otimes g)| = |\mathrm{tr}\,(T(f\otimes g))| \\ &= |\mathrm{tr}\,((Tf)\otimes g)| = |(Tf,g)| = \|Tf\|.\end{aligned}$$

故 $\|T\| = \sup\{\|Tf\|; f\in\mathcal{H}, \|f\|=1\} \le \|F_T\|$. ◇

定理 V.3.8 设 $\rho:\mathcal{L}(\mathcal{H})\to\mathcal{C}_1^*$ 由下式定义

$$\rho:\ T\mapsto F_T, \forall T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})\ .$$

则 ρ 是 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 到 $\mathcal{C}_1^*$ 的等距同构，即 $\mathcal{L}(\mathcal{H})\cong\mathcal{C}_1^*$.

证明 显然 ρ 是线性映射，已证明 ρ 是等距，只须证明 ρ 是满射的.

设 $l\in\mathcal{C}_1^*$，令

$$\Phi(f,g) = l(f\otimes g), \forall f, g\in\mathcal{H}\ .$$

易证 Φ 是 $\mathcal{H}$ 上共轭双线性泛函，且

$$|\Phi(f,g)| = |l(f\otimes g)| \le \|l\|\,\|f\otimes g\|_1 \le \|l\|\,\|f\|\,\|g\|, \forall f,g\in\mathcal{H}\ .$$

可见，Φ 是有界的. 故存在 $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$，使

$$\Phi(f,g) = (Tf,g), \forall f,g\in\mathcal{H}\ .$$

即

$$l(f\otimes g) = (Tf,g) = \mathrm{tr}\,[(Tf)\otimes g] = \mathrm{tr}\,(T(f\otimes g))\ .$$

因每个有限秩算子可表示为形如 $f\otimes g$ 的一秩算子之和，于是对任何有限秩算子 F 总有

$$l(F) = \mathrm{tr}\,(TF) = F_T(F)\ .$$

又由第一节定理 V.1.12，全体有限秩算子 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{C}_1$ 中按范数 $\|\cdot\|_1$ 稠密，故 $l = F_T$． ◇

定义 V.3.1 *$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 作为 Banach 空间 $<\mathcal{C}_1, \|\cdot\|_1>$ 的对偶，其上的弱 * 拓扑 $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \mathcal{C}_1)$ 称为 超弱拓扑．*

定理 V.3.9 *在 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上，*

弱算子拓扑 $\leq$ 超弱拓扑 $\leq$ 弱拓扑.

证明 由 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上超弱拓扑的定义可知超弱拓扑 $\leq$ 弱拓扑，故只须证

弱算子拓扑 $\leq$ 超弱拓扑.

为此又只须证，弱算子拓扑恰是使每个有限秩算子 $F \in \mathcal{F}$ 确定的 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上线性泛函 l_F 都连续的最弱拓扑 $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{J}), \mathcal{F})$．

设 $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 中的网， $T_\alpha \to T(\mathrm{WOT})$，则对任何 $f, g \in \mathcal{H}$，

$$(T_\alpha f, g) \to (Tf, g)\ .$$

即

$$\mathrm{tr}\,[T_\alpha(f \otimes g)] \to \mathrm{tr}\,[T(f \otimes g)]\ .$$

而每个有限秩算子 F 可以表成有限个形如 $f \otimes g$ 之一秩算子线性组合，于是

$$\mathrm{tr}\,(T_\alpha F) \to \mathrm{tr}\,(TF), \forall F \in \mathcal{F}\ .$$

亦即 $T_\alpha \to T(\mathrm{in}\ \sigma(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \mathcal{F}))$．

反之，若 $T_\alpha \to T(\mathrm{in}\ \sigma(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \mathcal{F}))$，则对 $\forall f, g \in \mathcal{H},\ f \otimes g \in \mathcal{F}$． 于是

$$\mathrm{tr}\,[T_\alpha(f \otimes g)] \to \mathrm{tr}\,[T(f \otimes g)]$$，即

$$(T_\alpha f, g) \to (Tf, g), \forall f, g \in \mathcal{H}\ .$$

亦即 $T_\alpha \to T$ (WOT)． ◇

练习题

1 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{H}$ 之正规正交基． $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $Ae_n = w_n e_{n+1}, w_n \in \mathbf{C}$， $n \geq 1$．那么 $A \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow \{w_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_p$, 这里 $p = 1$ 或 2．

2 设 $A \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$， f 是 $\sigma(A)$ 上的解析函数而且 $f(0) = 0$．那么 $f(A) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$．

3 设 p, q 都是正数，且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$．对 $\forall A \in \mathcal{C}_q(\mathcal{H})$，定义 $l_A(T) = \mathrm{tr}(AT)$， $\forall T \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$．证明 $\Phi : \mathcal{C}_q \to (\mathcal{C}_p)'$， $A \mapsto l_A, \forall A \in \mathcal{C}_q(\mathcal{H})$ 是一个等距线性同构.

4 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$， $l_A(T) = \mathrm{tr}\,(AT)$， $\forall T \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$．证明： l_A 是 $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ 上正线性泛函的充要条件是 A 是正算子.

第六章　无界线性算子

前面研究的所有（线性）算子都是有界的，但现实生活中遇到的许多算子都是无界的．例如量子力学中的能量算符，动量算符等重要算子都是无界的，因此有必要对无界算子作一简单介绍．

在这一章中，总假定 $\mathcal{H}$ 是复可分无穷维 Hilbert 空间．

设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{H}$ 之子空间 (未必闭)，若 $T:\ \mathcal{M}\to\mathcal{H}$ 映射是线性的，称 T 为 $\mathcal{H}$<u>内算子</u>，$\mathcal{M}$ 称为 T 之 <u>定义域</u>，记为 $\mathcal{D}(T)$，像集 $\{y\in\mathcal{H};\ y=Tx,\ x\in\mathcal{D}(T)\}$ 称为 T 之 <u>值域</u>，记为 $\mathcal{R}(T)$．

如果 $\mathcal{D}(T)$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，称 T 是 <u>稠定义</u> 的，若 $\mathcal{R}(T)$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，称 T 是 <u>稠值域</u> 的．

例　VI.0.1 设 $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$，令 $\mathcal{M}=\{f\in L^2(\mathbb{R});\ xf(x)\in L^2(\mathbb{R})\}$，定义

$$(Tf)(x)=xf(x),\ x\in\mathbb{R},\ \forall f\in\mathcal{M}.$$

则 $T:\ \mathcal{M}\to L^2(\mathbb{R})$ 是线性映射，且 $\mathcal{D}(T)=\mathcal{M}$．

取 $f_n=\chi_{[0,n]}/\sqrt{n},\ n=1,\ 2,\ \cdots$，其中 $\chi_{[0,n]}$ 表示区间 $[0,n]$ 之特征函数．由 $\mathrm{suppf_n}=[0,\mathrm{n}]$，可见 $f_n\in\mathcal{D}(T)$，而且 $\|f_n\|=1,\ n=1,\ 2,\ \cdots$．但是

$$\|Tf_n\|^2=\int_{\mathbb{R}}|xf_n(x)|^2\mathrm{d}x=\int_0^n\frac{x^2}{n}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3n}\Big|_0^n=\frac{n^2}{3}\to+\infty,\ n\to\infty\ .$$

这说明 T 不是有界的．

例　VI.0.2 设 $\mathcal{H}=L^2[0,1]$，

$$\mathcal{M}_1=\{f\in L^2[0,1];\ f\text{是绝对连续的，且}f'\in L^2[0,1]\}\ ,$$

$$\mathcal{M}_2=\{f\in\mathcal{M}_1;\ f(0)=f(1)\}\ ,$$

$$\mathcal{M}_3=\{f\in\mathcal{M}_1;\ f(0)=f(1)=0\}\ .$$

设 $f\in L^2[0,1]$，由连续函数在 $L^2[0,1]$ 中稠密，$\forall\,\epsilon>0$ 存在 $g\in C[0,1]$ 使

$$\|f-g\|=(\int_0^1|f(x)-g(x)|^2\mathrm{dx})^{\frac{1}{2}}<\epsilon\ ,$$

且 $g(0)=g(1)=0$．再由 Stone-Weierstrass 定理，可取多项式 p，使

$$\|g-p\|_\infty<\epsilon,\ \text{且}p(0)=p(1)=0\ .$$

这样 $\|p-f\|\le\|p-g\|+\|g-f\|\le2\epsilon$．而 $p\in\mathcal{M}_3$，这说明 $\mathcal{M}_3$ 在 $L^2[0,1]$ 是稠密的，从而 $\mathcal{M}_1,\ \mathcal{M}_2$ 亦在 $L^2[0,1]$ 中稠密．

定义 T_j，$j=1,\ 2,\ 3$ 如下：

$$T_jf=if',\ \forall f\in\mathcal{M}_j,\ .$$

易见 $T_j:\ \mathcal{M}_j\to L^2[0,1]$ 是线性映射，$\mathcal{D}(T_j)=\mathcal{M}_j,\ j=1,\ 2,\ 3$．它们都是微分算子，因而是无界的 (事实上，取 $f_k(x)=x^k(1-x)\in\mathcal{M}_j,\ k=1,\ 2,\ \cdots$，当 $k\to\infty,\ \|T_jf_k\|/\|f_k\|\to\infty,\ j=1,\ 2,\ 3$)．注意，$R(T_1)=L^2[0,1]$．事实上，$\forall f\in L^2[0,1]$，令 $F(x)=-i\int_0^x f(t)\mathrm{dt},\ \mathrm{x}\in[0,1]$，则 $F\in\mathcal{M}_1$，且 $T_1F=iF'=f$．但是

$$\mathcal{R}(T_2)=\mathcal{R}(T_3)=\{u\in L^2[0,1],\ \int_0^1u(x)\mathrm{d}x=0\}.$$

事实上，若 $u\in\mathcal{R}(T_2)=\mathcal{R}(T_3)$，则存在 $f\in\mathcal{M}_2$(或 $f\in\mathcal{M}_3$)，使 $u=T_jf=if',\ (j=2\text{或}3)$．从而

$$\int_0^1u(x)\mathrm{d}x=\int_0^1if'(x)\mathrm{d}x=if(x)|_0^1=0\ .$$

反之，若 $u\in L^2[0,1]$，且 $\int_0^1u(x)\mathrm{d}x=0$，令

$$f(x)=-i\int_0^xu(t)\mathrm{dt},\ \mathrm{x}\in[0,1]\ ,$$

则 $f \in \mathcal{M}_1$，且 $f(0) = f(1) = 0$．从而 $f \in \mathcal{M}_3 \subset \mathcal{M}_2$，且 $u = if' = T_j f,\ j = 1,\ 2$．

这个例子中的三个算子都是稠定义的，以下我们还要详细讨论它们.

VI.1 算子的伴随与谱

回忆本科泛函分析，我们有如下定义

定义 VI.1.1 对 $\mathcal{H}$ 内算子 T，令 $\mathcal{G}(T) = \{\langle x, y\rangle;\ x \in \mathcal{D}(T),\ y = Tx\}$，称为 T 之 图形．它是 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 中的子空间．若 $\mathcal{G}(T)$ 是 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 中闭子空间，称 T 是 闭算子．

由闭图形定理，$\mathcal{H}$ 上一个处处有定义的闭算子是连续的.

定义 VI.1.2 设 $T_1,\ T_2$ 都是 $\mathcal{H}$ 内算子，如果 $\mathcal{G}(T_1) \supset \mathcal{G}(T_2)$，称 T_1 是 T_2 之 扩张，记为 $T_1 \supset T_2$，或 $T_2 \subset T_1$．

不难证明：设 $T_1,\ T_2$ 都是 $\mathcal{H}$ 内算子，则 $T_1 \supset T_2$ 当且仅当

$$\mathcal{D}(T_1) \supset \mathcal{D}(T_2),\ \text{且} T_1 x = T_2 x, \forall x \in \mathcal{D}(T_2)\ .$$

显然引言例 VI.0.2 中的三个算子有关系 $T_1 \supset T_2 \supset T_3$．

易见，扩张具有如下简单性质.

(i) $T \supset T$．

(ii) 若 $T_1 \supset T_2$，$T_2 \supset T_1$，则 $T_1 = T_2$．

(iii) 若 $T_1 \supset T_2,\ T_2 \supset T_3$，则 $T_1 \supset T_3$．

这表明 ‘扩张’ 是一个序关系.

定义 VI.1.3 $\mathcal{H}$ 内的算子 T 如果有闭扩张 (即存在闭算子是 T 之扩张)，则称 T 为 可闭的.

命题 VI.1.1 设 T 是可闭的，则 T 有一最小闭扩张，记为 $\overline{T}$，而且 $\overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(\overline{T})$．

算子 T 之最小闭扩张 $\overline{T}$ 是指 T 之所有闭扩张中之最小者，即若 S 是 T 之闭扩张，必有 $S \supset \overline{T}$．

证明 设 S 是闭算子，$S \supset T$，则 $\mathcal{G}(S) \supset \mathcal{G}(T)$，而 $\mathcal{G}(S)$ 是闭集，故 $\mathcal{G}(S) \supset \overline{\mathcal{G}(T)}$．因 T 是可闭的，上述之闭算子 S 肯定存在．令

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{H};\ \text{存在} y \in \mathcal{H},\ \text{使} \langle x, y\rangle \in \overline{\mathcal{G}(T)}\}\ .$$

易见 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{H}$ 之子空间．注意 $\forall x \in \mathcal{M}$，必有唯一之 $y \in \mathcal{H}$，使 $\langle x, y\rangle \in \overline{\mathcal{G}(T)}$．事实上，若又有 $y_1 \in \mathcal{H}$，使 $\langle x, y_1\rangle \in \overline{\mathcal{G}(T)}$，则由前述 $\langle x,\ y\rangle,\ \langle x, y_1\rangle \in \overline{\mathcal{G}(T)} \subset \mathcal{G}(S)$．于是 $y_1 = Sx = y$．这样我们可定义 $\mathcal{H}$ 内线性算子 R： $Rx = y, \text{当} x \in \mathcal{M},\ \langle x, y\rangle \in \overline{\mathcal{G}(T)}$．由定义，$\mathcal{D}(R) = \mathcal{M},\ \mathcal{G}(R) = \overline{\mathcal{G}(T)}$．故 R 是 T 之闭扩张．设 S 是 T 之任何闭扩张，则 $\mathcal{G}(S) \supset \overline{\mathcal{G}(T)}$，从而 $\mathcal{G}(S) \supset \mathcal{G}(R)$，即 R 是 T 之最小闭扩张. ◇

设 T 是 $\mathcal{H}$ 内稠定义算子，给定 $y \in \mathcal{H}$，如果 $(Tx,\ y),\ x \in \mathcal{D}(T)$，是 $\mathcal{D}(T)$ 上连续线性泛函，则可以连续扩张为 $\mathcal{H}$ 上连续线性泛函，由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $\widetilde{y} \in \mathcal{H}$，使

$$(Tx,\ y) = (x,\ \widetilde{y}),\ \forall x \in \mathcal{D}(T)\ .$$

由于 $\widetilde{y}$ 是由 y 唯一确定，故可定义映射 T^*： $T^* y = \widetilde{y}$，即 $(Tx,\ y) = (x,\ T^* y),\ \forall x \in \mathcal{D}(T)$．显然 T^* 的定义域 $\mathcal{D}(T^*) = \{y \in \mathcal{H};\ (Tx,\ y),\ x \in \mathcal{D}(T),\ \text{是} \mathcal{D}(T) \text{上连续线性泛函}\}$．这样我

们得到 $\mathcal{H}$ 内算子 $T^*:\ \mathcal{D}(T^*)\to\mathcal{H}$，使

$$(Tx,\ y)=(x,\ T^*y),\ \forall x\in\mathcal{D}(T),\ y\in\mathcal{D}(T^*)\ .$$

定义 VI.1.4 由上式定义的 $\mathcal{H}$ 内算子 T^* 称为 T 之 伴随 .

注意，$y\in\mathcal{D}(T^*)$ 当且仅当 $(Tx,\ y),\ x\in\mathcal{D}(T),$ 是 $\mathcal{D}(T)$ 上连续线性泛函，从而是有界线性泛函，即存在常数 $c>0$ ，使 $|(Tx,\ y)|\le c\|x\|,\forall x\in\mathcal{D}(T)$ ．于是

$$\mathcal{D}(T^*)=\{y\in\mathcal{H};\ \text{存在常数}c>0,\ |(Tx,\ y)|\le c\|x\|,\ \forall x\in\mathcal{D}(T)\}.$$

为了定义 T 之伴随总是要求 $\mathcal{D}(T)$ 是稠密的，但是 $\mathcal{D}(T^*)$ 未必稠密.

命题 VI.1.2 设 $\mathcal{H}$ 内算子 $S,\ T$ 都是稠定义的．且 $S\supset T$ ，则 $S^*\subset T^*$.

证明 设 $y\in\mathcal{D}(S^*)$ ，则存在常数 $c>0$ ，使

$$|(Sx,\ y)|\le c\|x\|,\ \forall x\in\mathcal{D}(S).$$

因 $S\supset T$ ，于是 $\mathcal{D}(T)\subset\mathcal{D}(S)$ ，且 $Tx=Sx,\ \forall x\in\mathcal{D}(T)$ ．故

$$|(Tx,\ y)|\le c\|x\|,\ \forall x\in\mathcal{D}(T)\ .$$

可见 $y\in\mathcal{D}(T^*)$ ．又由 $(Sx,\ y)=(x,\ S^*y),\ \forall x\in\mathcal{D}(S)$ ，可知

$$(x,\ T^*y)=(Tx,\ y)=(Sx,\ y)=(x,\ S^*y),\ \forall x\in\mathcal{D}(T)\ .$$

由 $\mathcal{D}(T)$ 之稠密性，可知 $T^*y=S^*y$. ◇

定义 VI.1.5 在 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ 上定义算子 V 如下：

$$V\langle x,\ y\rangle=\langle -y,\ x\rangle,\ \forall\langle x,\ y\rangle\in\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\ .$$

显然 V 是等距，而且是满射的，于是 V 是 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ 上的酉算子．又

$$V^2\langle x,\ y\rangle=V\langle -y,\ x\rangle=\langle -x,\ -y\rangle=-\langle x,\ y\rangle,\ \forall\langle x,\ y\rangle\in\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}.$$

故 $V^2=-1$ ．这样若 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ 子空间，则 $V^2\mathcal{M}=\mathcal{M}$ ，而且 $(V\mathcal{M})^\perp=V(\mathcal{M}^\perp)$ ．事实上

$$\begin{aligned}
&\langle a,\ b\rangle\in(V\mathcal{M})^\perp\\
\Leftrightarrow\ &(\langle a,\ b\rangle,\ \langle -y,\ x\rangle)=(a,-y)+(b,\ x)=0,\ \forall\langle x,\ y\rangle\in\mathcal{M}.\\
\Leftrightarrow\ &(a,\ y)=(b,\ x),\ \forall\langle x,\ y\rangle\in\mathcal{M}.\ \text{即}(-b,\ x)+(a,\ y)=0,\ \forall\langle x,\ y\rangle\in\mathcal{M}.\\
\Leftrightarrow\ &(\langle -b,\ a\rangle,\ \langle x,\ y\rangle)=0,\ \forall\langle x,\ y\rangle\in\mathcal{M}.\\
\Leftrightarrow\ &\langle -b,\ a\rangle\in\mathcal{M}^\perp.\\
\Leftrightarrow\ &\langle a,\ b\rangle\in V(\mathcal{M}^\perp).
\end{aligned}$$

定理 VI.1.3 设 T 是 $\mathcal{H}$ 内稠定义算子，则 $\mathcal{G}(T^*)=[V\mathcal{G}(T)]^\perp$ ．从而 T^* 是闭算子.

证明

$$\begin{aligned}
&\langle y,\ z\rangle\in\mathcal{G}(T^*)\\
\Longleftrightarrow\ &y\in\mathcal{D}(T^*),\ z=T^*y.\\
\Longleftrightarrow\ &(Tx,\ y)=(x,\ z),\ \forall x\in\mathcal{D}(T)\\
\Longleftrightarrow\ &(-Tx,\ y)+(x,\ z)=0,\ \forall x\in\mathcal{D}(T),\\
&\text{即}(\langle -Tx,\ x\rangle,\ \langle y,\ z\rangle)=0,\ \ \forall\langle x,\ Tx\rangle\in\mathcal{G}(T)\\
\Longleftrightarrow\ &\langle y,\ z\rangle\in[V\mathcal{G}(T)]^\perp\ .
\end{aligned}$$

◇

推论 VI.1.4 设 T 是 $\mathcal{H}$ 内稠定义算子，则 $\overline{\mathcal{G}(T)}=[V\mathcal{G}(T^*)]^\perp$.

证明 由定理 VI.1.3，

$$V\mathcal{G}(T^*)=V([V\mathcal{G}(T)]^\perp)=VV(\mathcal{G}(T)^\perp)=V^2(\mathcal{G}(T)^\perp)=\mathcal{G}(T)^\perp.$$

故 $\overline{\mathcal{G}(T)}=(\mathcal{G}(T)^\perp)^\perp=[V\mathcal{G}(T^*)]^\perp$. ◇

命题 VI.1.5 设 T 是 $\mathcal{H}$ 内稠定义算子，则

(a) T 是可闭的 $\Leftrightarrow \mathcal{D}(T^*)$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密．在条件成立时， $\overline{T} = T^{**} \triangleq [T^*]^*$ ．特别，若 T 是闭算子，则 $T = T^{**}$.

(b) 若 T 是可闭的，则 $(\overline{T})^* = T^*$.

证明 (a) " $\Leftarrow$ " 因 $\mathcal{D}(T^*)$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密， T^{**} 存在，由推论 VI.1.4 及定理 VI.1.3，

$$\overline{\mathcal{G}(T)} = [V\mathcal{G}(T^*)]^\perp = \mathcal{G}(T^{**}).$$

再由命题 VI.1.1，可见 T^{**} 是 T 之最小闭扩张，即 $\overline{T} = T^{**}$.

" $\Rightarrow$ " 设 $y_0 \in \mathcal{H},\ y_0 \perp \mathcal{D}(T^*)$ ，则 $\forall \langle x,\ T^*x\rangle \in \mathcal{G}(T^*),\ V\langle x,\ T^*x\rangle = \langle -T^*x,\ x\rangle$ ．由 $x \in \mathcal{D}(T^*)$ ，

$$(\langle 0,\ y_0\rangle,\ \langle -T^*x,\ x\rangle) = (0,\ -T^*x) + (y_0,\ x) = 0.$$

根据推论 VI.1.4， $\langle 0,\ y_0\rangle \in [V\mathcal{G}(T^*)]^\perp = \overline{\mathcal{G}(T)}$ ．因 T 是可闭的， $\mathcal{G}(\overline{T}) = \overline{\mathcal{G}(T)}$ ．于是 $y_0 = \overline{T}0 = 0$ ，说明 $\mathcal{G}(T^*)$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密.

(b) 由 (a)， $\overline{T} = T^{**}$ ，又 T^* 是闭的，于是 $\overline{T}^* = (T^{**})^* = (T^*)^{**} = T^*$. ◇

命题 VI.1.6 设 T 是 $\mathcal{H}$ 内稠定义算子，则 $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$ 或 $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T^*)^\perp$ ．若 T 还是闭算子，则 $\mathcal{R}(T^*)^\perp = \mathcal{N}(T)$ 或 $\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{N}(T)^\perp$ ．这里， $\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathcal{D}(T);\ Tx = 0\}$.

证明 设 $y \in \mathcal{R}(T)^\perp$ ，则 $(Tx,\ y) = 0,\ \forall x \in \mathcal{D}(T)$ ．因而 $y \in \mathcal{D}(T^*)$ ，而且

$$(x,\ T^*y) = (Tx,\ y) = 0,\ \forall x \in \mathcal{D}(T)\ .$$

由 $\mathcal{D}(T)$ 之稠密性， $T^*y = 0$ ，即 $y \in \mathcal{N}(T^*)$.

反之，设 $y \in \mathcal{N}(T^*)$ ，则 $y \in \mathcal{D}(T^*)$ 且 $T^*y = 0$ ．于是

$$(Tx,\ y) = (x,\ T^*y) = 0,\ \forall x \in \mathcal{D}(T)\ .$$

可见 $\in \mathcal{R}(T)^\perp$ ．总之 $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$.

若 T 还是闭算子，则 $T = T^{**}$ ．由已证 $\mathcal{R}(T^*)^\perp = \mathcal{N}(T^{**}) = \mathcal{N}(T)$. ◇

注意，一般说来无界算子不是定义在整个空间上，因而在进行代数运算时，对定义域要明确规定，例如

$$\mathcal{D}(S+T) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T)\ ,$$

$$\mathcal{D}(ST) = \{x \in \mathcal{D}(T);\ Tx \in \mathcal{D}(S)\}\ .$$

命题 VI.1.7 设 $S, T, S+T$ 都是 $\mathcal{H}$ 内稠定义算子，则

$$(S+T)^* \supset S^* + T^*\ .$$

若 S 和 T 之一是有界的，则

$$(S+T)^* = S^* + T^*\ .$$

证明 若 $y \in \mathcal{D}(S^*+T^*) = \mathcal{D}(S^*) \cap \mathcal{D}(T^*)$ ，任给 $x \in \mathcal{D}(S+T) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T)$ ， (Sx, y) 和 (Tx, y) 都是有意义的，而且都是关于 $x \in \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T)$ 的连续线性泛函．于是,

$$((S+T)x, y) = (Sx, y) + (Tx, y)$$

是 $\mathcal{D}(S+T)$ 上连续线性泛函．从而， $y \in \mathcal{D}((S+T)^*)$ ．对任何 $x \in \mathcal{D}(S+T)$

$$\begin{aligned}(x, (S+T)^*y) &= ((S+T)x, y) = (Sx, y) + (Tx, y)\\ &= (x, S^*y) + (x, T^*y) = (x, (S^*+T^*)y).\end{aligned}$$

由 $\mathcal{D}(S+T)$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，可知

$$(S+T)^*y = S^*y + T^*y,\ \forall y \in \mathcal{D}(S^*+T^*)\ .$$

故

$$(S+T)^* \supset S^* + T^* .$$

若 $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，则 $S^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ．于是 $\mathcal{D}(S^*+T^*) = \mathcal{D}(T^*)$ ．注意到 $\mathcal{D}(S+T) = \mathcal{D}(T)$ ．对 $y \in \mathcal{D}((S+T)^*)$ ， $((S+T)x, y)$ 是关于 $x \in \mathcal{D}(S+T)$ 的连续线性泛函．而 (Sx, y) 是关于 $x \in \mathcal{H}$ 的连续线性泛函，于是

$$(Tx, y) = ((S+T)x, y) - (Sx, y)$$

亦是关于 $x \in \mathcal{D}(T)$ 的连续线性泛函．故 $y \in \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(S^*+T^*)$ ．所以 $\mathcal{D}((S+T)^*) \subset \mathcal{D}(S^*+T^*)$ ．

结合前证， $(S+T)^* = S^* + T^*$ ． ◇

命题 VI.1.8 设 S, T, ST 皆是 $\mathcal{H}$ 内稠定义算子，则 $T^*S^* \subset (ST)^*$ ．若 $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，则 $T^*S^* = (ST)^*$ ．

证明 设 $y \in \mathcal{D}(T^*S^*)$ ，即 $y \in \mathcal{D}(S^*)$ 且 $S^*y \in \mathcal{D}(T^*)$ ．于是 $(STx,\ y) = (Tx,\ S^*y),\ x \in \mathcal{D}(ST)$ ，是 $\mathcal{D}(ST)$ 上连续线性泛函，即 $y \in \mathcal{D}((ST)^*)$ ．又

$$(x,\ (ST)^*y) = (STx,\ y) = (Tx,\ S^*y) = (x,\ T^*S^*y),\ \forall x \in \mathcal{D}(ST) .$$

因 $\mathcal{D}(ST)$ 是稠密的，故 $(ST)^*y = T^*S^*y$ ．可见 $T^*S^* \subset (ST)^*$ ．

设 $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，则 $\mathcal{D}(ST) = \mathcal{D}(T),\ S^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ．设 $y \in \mathcal{D}((ST)^*)$ ，则 $(Tx,\ S^*y) = (STx,\ y),\ x \in \mathcal{D}(T)$ ，是 $\mathcal{D}(T)$ 上连续线性泛函，即 $S^*y \in \mathcal{D}(T^*)$ ．亦即 $\mathcal{D}((ST)^*) = \mathcal{D}(T^*S^*)$ ．由已证 $(ST)^* \supset T^*S^*$ ，可知 $(ST)^* = T^*S^*$ ． ◇

定义 VI.1.6 设 T 是 $\mathcal{H}$ 内算子， $\lambda \in \mathbb{C}$ ．若 $T - \lambda I$ 是 $\mathcal{D}(T)$ 到 $\mathcal{H}$ 上的双射，且 $(T-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，称 λ 是 T 之 正则点， T 之全体正则点的集合称为 T 之 预解集，记为 $\rho(T)$ ．对 $\lambda \in \rho(T),\ R(\lambda,\ T) = (T-\lambda I)^{-1}$ 称为 T 之 预解式，有时也记为 $R_\lambda(T)$ 或 $R(\lambda)$ ．称 $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ 为 T 之 谱．

若存在 $x \in \mathcal{D}(T),\ x \neq 0$ 使 $(T-\lambda I)x = 0$ ，称 λ 是 T 之 特征值，称 x 为 T 相应于 λ 的 特征向量． T 之全体特征值集合称为 T 的点谱，记为 $\sigma_p(T)$ ．

由定义可见， $\lambda \in \rho_p(T)$ 当且仅当存在 $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，使

$$S(T-\lambda I) \subset (T-\lambda I)S = I .$$

注意，这里 $S(T-\lambda I) \neq I$ ，主要是 $T-\lambda I$ 未必定义在整个空间上.

命题 VI.1.9 (i) $\rho(T)$ 总是开集， $\sigma(T)$ 是闭集.

(ii) $\{R_\lambda = R(\lambda,\ T);\ \lambda \in \rho(T)\}$ 是交换集，即 $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$ ， $\forall \lambda, \mu \in \rho(T)$ ．此外，

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu,\ \forall \lambda,\ \mu \in \rho(T).$$

证明 (i) $\forall \lambda_0 \in \rho(T)$ ，往证 λ_0 是 $\rho(T)$ 的内点，不失一般性，可设 $\lambda_0 = 0$ ，于是存在 $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，使 $ST \subset TS = I$ ．设 $\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| < 1/\|S\|$ ，则 $(I-\lambda S)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ．而

$$\begin{aligned}
(T-\lambda I)S(I-\lambda S)^{-1} &= (TS-\lambda S)(I-\lambda S)^{-1} = I \\
S(I-\lambda S)^{-1}(T-\lambda I) &= (I-\lambda S)^{-1}S(T-\lambda I) = (I-\lambda S)^{-1}(ST-\lambda S) \\
&\subset (I-\lambda S)^{-1}(I-\lambda S) = I.
\end{aligned}$$

即 $\lambda \in \rho(T)$.

(ii) 已知 $\forall\mu\in\rho(T),\ (T-\mu I)R_\mu=I$，于是

$$\begin{aligned}R_\lambda-R_\mu &= R_\lambda(T-\mu I)R_\mu-R_\mu=[R_\lambda(T-\mu I)-I]R_\mu\\ &= [R_\lambda[(T-\lambda I)+(\lambda-\mu)I]-I]R_\mu\\ &= [I+R_\lambda(\lambda-\mu)I-I]R_\mu\\ &= (\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu.\end{aligned}$$

由此可见 $R_\lambda R_\mu=R_\mu R_\lambda,\ \forall\lambda,\ \mu\in\rho(T)$． ◇

VI.2 自伴算子

定义 VI.2.1 设 T 是 $\mathcal{H}$ 内稠定义算子，若 $T\subset T^*$，即 $\mathcal{D}(T)\subset\mathcal{D}(T^*)$，且

$$(Tx,\ y)=(x,\ Ty),\ \forall x,\ y\in\mathcal{D}(T),$$

称 T 是 对称的．若进一步还有 $\mathcal{D}(T)=\mathcal{D}(T^*)$，即 $T=T^*$，称 T 是 自伴的．

由定理 VI.1.3 知道，T^* 是闭算子，因此当 T 是对称的时候，T 是可闭的，T^* 是 T 之闭扩张．事实上，很容易证明下述成立.

命题 VI.2.1 设 T 是 $\mathcal{H}$ 内稠定义的，则

(a) T 是对称的 $\Leftrightarrow T$ 是可闭的且 $T^{**}\subset T^*$.

(b) T 是闭的对称的 $\Leftrightarrow T=T^{**}\subset T^*$.

(c) T 是自伴的 $\Leftrightarrow T=T^{**}=T^*$.

(d) T 是自伴的 $\Leftrightarrow T,\ T^*$ 是对称的.

例 VI.2.1 考察本章一开始例 VI.0.2 中定义的三个算子 $T_j,\ j=1,\ 2,\ 3$．我们将证明

$$T_1^*=T_3,\ T_2^*=T_2,\ T_3^*=T_1.$$

从而 T_2 是自伴的，由 $T_3\subset T_2\subset T_1$，可知 T_3 是对称的，而且 $T_1,\ T_2,\ T_3$ 皆是闭算子.

先证第一个等式，若 $f\in\mathcal{D}(T_3)$，则 $\forall g\in\mathcal{D}(T_1)$

$$\begin{aligned}(T_1g,\ f) &= (ig',\ f)=\int_0^1 ig'\bar f\mathrm{d}x=\overline{\int_0^1\bar g'(\bar i f)\mathrm{d}x}\\ &= \overline{-if\bar g|_0^1+\int_0^1\bar g(if)'\mathrm{d}x}=\overline{(if',\ g)}=\overline{(T_3f,\ g)}=(g,\ T_3f).\end{aligned}$$

可见 $f\in\mathcal{D}(T_1^*)$，且 $T_3f=T_1^*f$．故 $T_3\subset T_1^*$．

反之，设 $f\in\mathcal{D}(T_1^*)$，令 $\varphi=T_1^*f$，对任何 $g\in\mathcal{D}(T_1)$，

$$(g,\ \varphi)=(g,\ T_1^*f)=(T_1g,\ f)=\int_0^1 ig'\bar f\mathrm{d}x.$$

设 $\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t$，则 $\Phi\in L^2[0,\ 1]$ 是绝对连续的，且 $\Phi(0)=0,\ \Phi'=\varphi\in L^2[0,\ 1]$．又

$$\int_0^1 ig'\bar f\mathrm{d}x=(g,\ \varphi)=\int_0^1 g\bar\varphi\mathrm{d}x=g\overline{\Phi}|_0^1-\int_0^1 g'\overline{\Phi}\mathrm{d}x.$$

注意，常值函数 $1\in\mathcal{D}(T_1)$，用 $g=1$ 代入上式，可得 $\Phi(1)=0$．于是 $\Phi\in\mathcal{M}_3=\mathcal{D}(T_3)$，且

$$\int_0^1 ig'\bar f\mathrm{d}x=-\int_0^1 g'\overline{\Phi}\mathrm{d}x,\ \forall g\in\mathcal{D}(T_1).$$

即

$$\int_0^1 ig'\overline{(f+i\Phi)}\mathrm{d}x=0,\ \forall g\in\mathcal{D}(T_1).$$

或

$$(T_1g,\ f+i\Phi)=0,\ \forall g\in\mathcal{D}(T_1).$$

这表明 $f+i\Phi\in\mathcal{R}(T_1)^{\perp}$. 由前述例 VI.0.2 , $\mathcal{R}(T_1)=L^2[0,\ 1]$, 故 $f+i\Phi=0$, 即 $f=-i\Phi\in\mathcal{D}(T_2)$. 总之, $\mathcal{D}(T_1^*)=\mathcal{D}(T_3)$. 即 $T_1^*=T_3$. 其余关系式证明是类似的, 留作习题.

例 VI.2.2 设 $T_j,\ j=1,\ 2,\ 3$, 如例 VI.2.1 , 令

$$T_4f=if',\ \forall f\in\mathcal{D}(T_4)\ ,$$
$$\mathcal{D}(T_4)=\{f\in\mathcal{D}(T_1);\ f(0)=0\}.$$

则下述成立

(a) $\sigma(T_1)=\sigma_p(T_1)=\mathbb{C}$.

(b) $\sigma(T_2)=\sigma_p(T_2)=\{2n\pi;\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$.

(c) $\sigma(T_3)=\mathbb{C},\ \sigma_p(T_3)=\emptyset$, 且 $\dim\{\mathcal{R}(T_3-\lambda I)^{\perp}\}=1,\ \forall\lambda\in\mathbb{C}$.

(d) $\sigma(T_4)=\emptyset$.

证明 (a) 设 $\lambda\in\mathbb{C}$, 若 $(T_1-\lambda I)f=0$, 对某个 $f\in\mathcal{D}(T_1)$, 即 $if'-\lambda f=0$. 或 $f'=-i\lambda f$. 易见上式成立必须且只须

$$f=ce^{-i\lambda x},\quad (\text{其中 } c \text{ 为常数}) .$$

而对非零的常数 c , $f\in\mathcal{D}(T_1)$ 且 $f\neq0$. 故 $\lambda\in\sigma_p(T_1)\subset\sigma(T_1)$. 总之 $\sigma(T_1)=\sigma_p(T_1)=\mathbb{C}$.

(b) 设 $\lambda\in\sigma_p(T_2)$. 注意 T_2 和 T_1 之定义都是一样的, 只是定义域不同. 而 $\mathcal{D}(T_2)\subset\mathcal{D}(T_1)$, 于是由

$$(T_2-\lambda I)f=0,\ f\in\mathcal{D}(T_2)\ ,$$

必有

$$(T_1-\lambda I)f=0\ .$$

由 (a) , 这必须且只须

$$f=ce^{-i\lambda x},\quad (\text{其中 } c \text{ 为常数}) .$$

而对 $f\in\mathcal{D}(T_2),\ f(0)=f(1)$. 这样必须 $e^{-i\lambda}=1$, 故存在整数 n 使 $\lambda=2n\pi$. 反之易见, 若 $\lambda=2n\pi$, 则 $\lambda\in\sigma_p(T_2)$. 于是

$$\sigma_p(T_2)=\{2n\pi;\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}\ .$$

假若 $\lambda\neq2n\pi;\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$, 则 $T_2-\lambda I$ 是单射的. 又 $\forall g\in L^2[0,\ 1]$, 方程

$$\begin{cases} if'-\lambda f=g\\ f(0)=f(1)\end{cases}$$

有解

$$f=e^{-i\lambda x}(-i\textstyle\int_0^x g(t)e^{i\lambda t}\mathrm{d}t+C)\ ,$$

其中 $C=\frac{i}{1-e^{i\lambda}}\int_0^1 g(t)e^{i\lambda t}\mathrm{d}t$. 显然如此之 $f\in\mathcal{D}(T_2)$, 而且 $(T_2-\lambda I)f=g$. 故 $T_2-\lambda I$ 是 $\mathcal{D}(T_2)$ 到 $L^2[0,\ 1]$ 的双射. 于是 $(T_2-\lambda I)^{-1}$ 是 $L^2[0,\ 1]$ 上处处定义的线性算子. 因 $T_2-\lambda I$ 是闭算子, 从而 $(T_2-\lambda I)^{-1}$ 也是闭算子. 由闭图形定理, $(T_2-\lambda I)^{-1}$ 是有界的, 因而 $\lambda\in\rho(T_2)$. 总之

$$\sigma(T_2)=\sigma_p(T_2)=\{2n\pi;\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}\ .$$

(c) $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ 由 $(T_3-\lambda I)f=0,\ f\in\mathcal{D}(T_3)$ 必有

$$(T_1-\lambda I)f=0$$

当且仅当

$$f=ce^{-i\lambda x},\quad (\text{其中 } c \text{ 为某个常数}) .$$

对 $f\in\mathcal{D}(T_3)$ 必有 $f(0)=f(1)=0$, 则 $c=0$, 从而 $f=0$. 这表明 $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ 都不是 T_3 的特征

值，即 $\sigma_p(T_3)=\emptyset$.

由例 VI.2.1， $T_3^*=T_1$，于是再由命题 VI.1.7， $(T_3-\lambda I)^*=T_3^*-\bar{\lambda}I=T_1-\bar{\lambda}I$．根据 (a)，对任何 $\lambda\in\mathbb{C}$, $\dim\mathcal{N}(T_1-\bar{\lambda}I)=1$，再由命题 VI.1.6，

$$\dim\mathcal{R}(T_3-\lambda I)^{\perp}=\dim\mathcal{N}([T_3-\lambda I]^*)=\dim\mathcal{N}(T_1-\bar{\lambda}I)=1\,.$$

于是 $\sigma(T_3)=\mathbb{C}$．

(d) 首先证明 T_4 是闭算子.

设 $f_n\in\mathcal{D}(T_4)$， $f_n\to f$， $if_n'\to g$，当 $n\to\infty$．往证 $f\in\mathcal{D}(T_4)$，且 $if'=g$．

由定义可见， $T_4\subset T_1$，而 T_1 是闭算子，故

$$f\in\mathcal{D}(T_1)\text{，且 }T_1f=g\,.$$

即 $if'=g$．这表明 f 是绝对连续的．又

$$\begin{aligned}\int_0^x|f_n'(t)-f'(t)|\mathrm{d}t &\le\int_0^1|f_n'(t)-f'(t)|\mathrm{d}t\le(\int_0^1|f_n'-f'|^2\mathrm{d}t)^{1/2}\\ &=\|f_n'-f'\|=\|if_n'-if'\|=\|if_n'-g\|\to 0.\end{aligned}$$

故

$$\lim_n f_n(x)=\lim_n\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(0)\,,\quad\forall x\in[0,1]\,.$$

又由 $\|f_n-f\|\to 0$，存在 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 使得

$$f_{n_j}(x)\to f(x)\,,\quad\text{a. e. 于 }[0,1]\,.$$

这表明 $f(0)=0$．故 $f\in\mathcal{D}(T_4)$．

$\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $(T_4-\lambda I)f=0$, $f\in\mathcal{D}(T_4)$ 必有

$$(T_1-\lambda I)f=0\,.$$

由 (a)，这当且仅当

$$f=ce^{-i\lambda x},\quad\text{(其中 c 为某个常数)}\,.$$

因 $f\in\mathcal{D}(T_4)$， $f(0)=0)$，必有 $c=0$，即 $f=0$，所以 $T_4-\lambda I$ 是单射的.

$\forall g\in L^2[0,\ 1]$ 方程

$$\begin{cases}if'-\lambda f=g\\ f(0)=0\end{cases}$$

有解

$$f=-ie^{-i\lambda x}\int_0^x g(t)e^{i\lambda t}\mathrm{d}t\,.$$

显然 $f\in\mathcal{D}(T_4)$，且 $(T_4-\lambda I)f=g$．故 $T_4-\lambda I$ 是从 $\mathcal{D}(T_4)$ 到 $L^2[0,\ 1]$ 上的双射，这样 $(T_4-\lambda I)^{-1}$ 是 $L^2[0,\ 1]$ 上处处定义的线性算子．由 T_4 是闭算子，可知 $(T_4-\lambda I)^{-1}$ 也是闭算子．由闭图形定理， $(T_4-\lambda I)^{-1}$ 是有界的，故 $\lambda\in\rho(T_4)$．总之 $\sigma(T_4)=\emptyset$． ◇

这个例子表明，对无界算子来说，谱不必是有界的，也未必是非空的，甚至可以是全平面，因而在处理无界算子特别小心.

定理 VI.2.2 设 T 是对称算子，则下述等价：

(a) T 是自伴的；

(b) T 是闭算子且 $\mathcal{N}(T^*\pm iI)=\{0\}$；

(c) $R(T\pm iI)=\mathcal{H}$.

证明 (a)⇒(b) 由 $T=T^*$ 可见 T 是闭算子，若 $x\in\mathcal{N}(T^*-iI)$，即 $x\in\mathcal{D}(T^*)$ 使 $T^*x=ix$．由 $T=T^*$ 知 $x\in\mathcal{D}(T)$，且 $Tx=ix$，于是

$$i(x,x)=(ix,x)=(Tx,x)=(x,T^*x)=(x,ix)=-i(x,x)\,.$$

可见 $(x,\ x)=0$ ，即 $x=0$. 故 $\mathcal{N}(T^*-iI)=\{0\}$.

同理可证 $\mathcal{N}(T^*+iI)=\{0\}$.

(b)⇒(c) 由命题 VI.1.6 ,

$$\overline{\mathcal{R}(T-iI)}=\mathcal{N}(T-iI)^{*\perp}=\mathcal{N}((T^*+iI))^{\perp}=\{0\}^{\perp}=\mathcal{H}\ .$$

这表明 $\mathcal{R}(T-iI)$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，下面只须证 $\mathcal{R}(T-iI)$ 使闭的. $\forall x\in\mathcal{D}(T)$ ，由 T 是对称的，

$$\begin{aligned}\|(T-iI)x\|^2 &= ((T-iI)x,\ (T-iI)x)\\ &= (Tx,\ Tx)-i(x,\ Tx)+i(Tx,\ x)+(x,\ x)\\ &= \|Tx\|^2+\|x\|^2.\end{aligned}$$

若 $x_n\in\mathcal{D}(T),\ n=1,\ 2,\ \cdots$ ，使 $(T-iI)x_n\to y$ ，则

$$\|(T-iI)(x_n-x_m)\|^2=\|T(x_n-x_m)\|^2+\|x_n-x_m\|^2\ .$$

于是 $\{x_n\}$ 亦是 Cauchy 列. 设 $x_n\to x_0$ ，由 $T-iI$ 是闭算子， $x_0\in\mathcal{D}(T)=\mathcal{D}(T-iI)$ ，且 $y=(T-iI)x_0\in\mathcal{R}(T-iI)$. 可见 $\mathcal{R}(T-iI)$ 是闭的.

同理可证 $\mathcal{R}(T+iI)=\mathcal{H}$.

(c)⇒(a) 已知 $T\subset T^*$ ，设 $y\in\mathcal{D}(T^*)$ ，由于 $\mathcal{R}(T-iI)=\mathcal{H}$ ，必有 $x\in\mathcal{D}(T)$ ，使

$$(T-iI)x=(T^*-iI)y\ .$$

又 $Tx=T^*x$ ，于是

$$(T^*-iI)x=(T^*-iI)y\ ,$$

即 $(T^*-iI)(x-y)=0$. 由命题 VI.1.6 ， $\mathcal{N}(T^*-iI)=\mathcal{R}(T+iI)^{\perp}=0$ ，故 $x-y=0$ ，即 $y=x\in\mathcal{D}(T)$ ，所以 $\mathcal{D}(T)=\mathcal{D}(T^*),\ T^*=T$. ◇

推论 VI.2.3 设 T 是 $\mathcal{H}$ 内自伴算子，则 $\sigma(T)\subset\mathbb{R}$. 特别 $(T\pm iI)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

证明 由定理 VI.2.2 ， $T\pm iI$ 是 $\mathcal{D}(T)$ 到 $\mathcal{H}$ 上的双射闭算子，从而 $(T\pm iI)^{-1}$ 是 $\mathcal{H}$ 上处处定义的闭算子，由闭图形定理， $(T\pm iI)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

对任意 $b\in\mathbb{R},\ b>0,\ \frac{1}{b}T$ 还是自伴的. 于是 $(\frac{1}{b}T\pm iI)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，从而 $(T\pm ibI)^{-1}=b(\frac{1}{b}T\pm iI)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

$\forall\lambda\in\mathbb{C},\ \lambda=a+bi,\ a,\ b\in\mathbb{R},\ b\neq 0,\ T-\lambda I=(T-aI)-ibI,\ T-aI$ 是自伴的. 由 $b\neq 0$ ，于是有 $(T-\lambda I)^{-1}=[(T-aI)-ibI]^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$. 即 $\lambda\in\rho(T)$ ，总之 $\sigma(T)\subset\mathbb{R}$. ◇

命题 VI.2.4 设 T 是自伴算子， $S\supset T$ ，若 S 是对称的，则 $S=T$.

证明 由 $S\supset T$ ，根据命题 VI.1.2 有， $S^*\subset T^*$. 而 S 是对称的， T 是自伴的，有

$$S\subset S^*\subset T^*=T\subset S\ .$$

故 $S=T$. ◇

VI.3 射影值测度、 Borel 函数演算

以下总以 $\mathcal{B}^{(2)}$ 表示 $\mathbb{C}$ 中 Borel 集合之全体，即 $\mathbb{C}$ 中 Borel 代数. $\mathcal{H}$ 是复可分无穷维 Hilbert 空间， $\mathcal{P}$ 表示 $\mathcal{H}$ 上全体正交射影集合.

$E:\ \mathcal{B}^{(2)}\to\mathcal{P}$ 是射影值测度，即定义在 $\mathcal{B}^{(2)}$ 上可数可加的射影值函数，且

$$E(\mathbb{C})=I,\ E(\emptyset)=0\ .$$

E 不必具有紧支集.

设 $x,\ y\in\mathcal{H}$，令

$$E_{(x,y)}(S)=(E(S)x,\ y),\ S\in\mathcal{B}^{(2)}\ ,$$

则 $E_{(x,y)}$ 是 $\mathbb{C}$ 上正则复值 Borel 测度．而 $E_{(x,x)}$ 是 $\mathbb{C}$ 上正则正 Borel 测度．设 f 是 $\mathbb{C}$ 上函数，未必有界，但 E 几乎处处取有限值，即存在 Borel 集 $S_0,\ E(S_0)=0$，而在 $\mathbb{C}\setminus S_0$ 上 f 处处取有限值．不失一般性，可设 f 处处取有限值．

用 $L^2(\mathbb{C},E_{(x,x)})$ 表示满足条件

$$\int_{\mathbb{C}}|f(\lambda)|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}(\lambda)<+\infty$$

的 Borel 函数 f 的全体按 E －几乎处处相等关系之等价类集合，按范数

$$\|f\|_2=(\int_{\mathbb{C}}|f(\lambda)|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}(\lambda))^{\frac{1}{2}}$$

成为 Hilbert 空间，简记为 $L^2(E_{(x,x)})$，其内积为

$$(f,\,g)=\int_{\mathbb{C}}f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\mathrm{d}E_{(x,x)}(\lambda),\ \forall f,\ g\in L^2(\mathbb{C},E_{(x,x)}).$$

给定 Borel 函数 f，令

$$D_f=\{x\in\mathcal{H};\ f\in L^2(E_{(x,x)})\}.$$

对有界 Borel 函数 f，总有 $D_f=\mathcal{H}$．一般地有

引理 VI.3.1 (a) D_f 是 $\mathcal{H}$ 的稠密子空间.

(b) 设 $x,\ y\in\mathcal{H}$ 则

$$\int_{\mathbb{C}}|f(\lambda)|\mathrm{d}|E_{(x,y)}|\le\|y\|(\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)})^{\frac{1}{2}}\ ,$$

其中 $|E_{(x,y)}|$ 是 $E_{(x,y)}$ 的全变差测度．当 $f\in L^2(E_{(x,x)}),\ \int_{\mathbb{C}}f\mathrm{d}E_{(x,y)}$ 是 $y\in\mathcal{H}$ 的有界共轭线性泛函.

(c) 若 f 是有界 Borel 函数，$x,\ z\in\mathcal{H},\ v=\widetilde{J}(f)z$，则

$$\mathrm{d}E_{(x,\ v)}=\bar{f}\mathrm{d}E_{(x,z)}\ ,$$

其中 $\widetilde{J}(f)$ 表示有界 Borel 函数演算 (见第四章 §5)，即

$$(\widetilde{J}(f)x,y)=\int_{\mathbb{C}}f(\lambda)\mathrm{d}E_{(x,y)}(\lambda)\ ,\quad\forall x,\,y\in\mathcal{H}\ .$$

证明 (a) 设 $x,y\in\mathcal{H},\ z=x+y$，则

$$\begin{aligned}(E(S)z,z)) &= \|E(S)z\|^2=\|E(S)x+E(S)y\|^2\le(\|E(S)x\|+\|E(S)y\|)^2\\ &\le 2(\|E(S)x\|^2+\|E(S)y\|^2)\\ &= 2(E(S)x,x)+2(E(S)y,y).\end{aligned}$$

若 $\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}<+\infty,\ \int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(y,y)}<+\infty$，则

$$\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(z,z)}\le2\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}+2\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(y,y)}<\infty.$$

可见，若 $x,\ y\in D_f$，则 $z=x+y\in D_f$．又若 $\lambda\in\mathbb{C}$，

$$(E(S)\lambda x,\ \lambda x)=|\lambda|^2(E(S)x,\ x)\ .$$

可见若 $x\in D_f$，则 $\lambda x\in D_f$．故 D_f 是子空间.

对每个自然数 n，令

$$S_n=\{\lambda\in\mathbb{C};\ n-1\le|f(\lambda)|<n\}\ .$$

则 $S_n\in\mathcal{B}^2$，且 $S_j\cap S_n=\emptyset$，当 $n\neq j$．而 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\mathbb{C}$．由射影值测度强可数可加性，对任意 $y\in\mathcal{H}$，

$$y=E(\mathbb{C})y=\lim_k\sum_{n=1}^{k}E(S_n)y. \tag{3.1}$$

当 $x\in E(S_n)\mathcal{H}$，

$$(E(S)x,\ x)=(E(S)E(S_n)x,\ E(S_n)x)=(E(S\cap S_n)x,\ x)\ .$$

$\forall S\in\mathcal{B}^2$. 可见 $E_{(x,x)}$ 具有含于 S_n 中的支集. 于是

$$\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}=\int_{S_n}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}\le n^2\|E_{(x,x)}\|<+\infty.$$

即 $x\in D_f$. 这样，对任意 $y\in\mathcal{H}$ ， $E(S_n)x\in E(S_n)\mathcal{H}\subset D_f$ ，从而 $\sum\limits_{n=1}^{k}E(S_n)y\in D_f$. 由 (3.1)， $y\in\overline{D_f}$.

(b) 设 $x,\ y\in\mathcal{H}$ ，由 $E_{(x,y)}$ 的定义易见 $\int_{\mathbb{C}}f\mathrm{d}E_{(x,y)}$ 是 $y\in\mathcal{H}$ 的共轭线性泛函. 下面往证它还是有界的.

首先设 f 是有界 Borel 函数，由测度分解，存在 Borel 函数 $a,\ |a|=1$ ，使 $\mathrm{d}E_{(x,y)}=a\mathrm{d}|E_{(x,y)}|$. 这样

$$f\mathrm{d}E_{(x,y)}=fa\mathrm{d}|E_{(x,y)}|\ ,$$

因 af 是 Borel 函数，存在 Borel 函数 $u,\ |u|=1$ ，使 $uaf=|af|=|f|$. 于是

$$|f|\mathrm{d}|E_{(x,y)}|=uaf\mathrm{d}|E_{(x,y)}|=uf\mathrm{d}E_{(x,y)}\ .$$

这样

$$\int_{\mathbb{C}}|f|\mathrm{d}|E_{(x,y)}|=\int_{\mathbb{C}}uf\mathrm{d}E_{(x,y)}=(\widetilde{J}(uf)x,\ y)\le\|\widetilde{J}(uf)x\|\,\|y\|\ .$$

因

$$\begin{aligned}\|\widetilde{J}(uf)x\|^2&=(\widetilde{J}(uf)x,\widetilde{J}(uf)x)=(\widetilde{J}(|uf|^2)x,\ x)\\&=\int_{\mathbb{C}}|uf|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}=\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}.\end{aligned}$$

故

$$\int_{\mathbb{C}}|f|\mathrm{d}|E_{(x,y)}|\le\|y\|(\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)})^{\frac{1}{2}}\ .$$

对一般 Borel 函数 f ，令 $f_n=f\varphi_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots$ ，其中

$$\varphi_n(\lambda)=\begin{cases}1, & \text{当}|f(\lambda)|\le n,\\ 0, & \text{当}|f(\lambda)|>n.\end{cases}$$

如此定义的 f_n 称为 f 的截断函数，它们都是有界的 Borel 函数，且 $|f_n|\nearrow|f|$ ，当 $n\to\infty$. 由已证，

$$\int_{\mathbb{C}}|f_n|\mathrm{d}|E_{(x,y)}|\le\|y\|(\int_{\mathbb{C}}|f_n|^2\mathrm{d}E_{(x,x)})^{\frac{1}{2}}\le\|y\|(\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)})^{\frac{1}{2}}\ .$$

令 $n\to\infty$ ，由 Fatou 引理可得

$$\int_{\mathbb{C}}|f|\mathrm{d}|E_{(x,y)}|\le\|y\|(\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)})^{\frac{1}{2}}\ .$$

这表明对一般的 f ， (b) 成立.

(c) 对任何有界 Borel 函数 g ，由 Borel 函数演算

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}}g\mathrm{d}E_{(x,v)}&=(\widetilde{J}(g)x,\ v)=(\widetilde{J}(g)x,\ \widetilde{J}(f)z)\\&=(\widetilde{J}(f)^*\widetilde{J}(g)x,\ z)=(\widetilde{J}(\bar{f})\widetilde{J}(g)x,\ z)\\&=(\widetilde{J}(\bar{f}g)x,\ z)=\int_{\mathbb{C}}\bar{f}g\mathrm{d}E_{(x,z)}.\end{aligned}$$

任给 Borel 集 S ，取 $g=\chi_S$ ，则

$$(E_{(x,v)}(S))=\int_{\mathbb{C}}\chi_S\mathrm{d}E_{(x,v)}=\int_{\mathbb{C}}\bar{f}\chi_S\mathrm{d}E_{(x,z)}=\int_{\mathbb{C}}\bar{f}\mathrm{d}E_{(x,z)}\ ,$$

即 $\mathrm{d}E_{(x,v)}=\bar{f}\mathrm{d}E_{(x,z)}$. ◇

定理 VI.3.2 设 $E:\ \mathcal{B}^{(2)}\to\mathcal{P}$ 是射影值测度， f 是 $\mathbb{C}$ 上几乎处处取有限值的 Borel 函数，则存在 $\mathcal{H}$ 内稠定义闭算子 $\widetilde{J}(f)$ ，使 $\mathcal{D}(\widetilde{J}(f))=D_f$ 且

$$(\widetilde{J}(f)x,\ y)=\int_{\mathbb{C}}f\mathrm{d}E_{(x,y)},\ \forall x\in D_f,\ y\in\mathcal{H}\ .$$

此外，还有下述结论成立：

(a) $\|\widetilde{J}(f)x\|^2=\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)},\ x\in D_f$.

(b) 若 $f,\ g$ 都是 $\mathbb{C}$ 上 E 几乎处处取有限值的 Borel 函数，则

$$D_f\cap D_g\subset D_{f+g}\text{ 且}$$
$$\widetilde{J}(f)+\widetilde{J}(g)\subset\widetilde{J}(f+g)\ .$$

若 f 与 g 之一有界，则等式成立.

(c) 设 f,f_n ， $n=1,2,\cdots$ 都是 $\mathbb{C}$ 上 E- 几乎处处取有限值的 Borel 函数，且 $f_n\to f$ ，a. e. 于 $\mathbb{C}$. 若 $x\in D_f\cap D_{f_n}$ ， $\forall n\geq 1$ ，则对任意 $y\in\mathcal{H}$

$$\lim_{n\to\infty}(\widetilde{J}(f_n)x,\,y)=(\widetilde{J}(f)x,\,y)\ .$$

(d) 若 $f,\ g$ 都是 $\mathbb{C}$ 上 E 几乎处处取有限值的 Borel 函数，则

$$\mathcal{D}((\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(g))=D_g\cap D_{fg},\text{ 且}\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(g)\subset\widetilde{J}(fg).$$

从而

$$\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(g)=\widetilde{J}(fg)\Leftrightarrow D_{fg}=D_g\ .$$

(e) $[\widetilde{J}(f)]^*=\widetilde{J}(\bar{f}),\ \widetilde{J}(f)[\widetilde{J}(f)]^*=[\widetilde{J}(f)]^*\widetilde{J}(f)=\widetilde{J}(|f|^2)$.

特别得，若 f 是实值的，则 $\widetilde{J}(f)$ 是自伴的.

实际上，定理 VI.3.2 定义了无界 Borel 函数的函数演算.

证明 由引理 VI.3.1 ， $\forall x\in D_f$ ， $\int_{\mathbb{C}}f\mathrm{d}E_{(x,y)}$ 是 $y\in\mathcal{H}$ 的有界共轭线性泛函，且范数不超过 $(\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)})^{\frac{1}{2}}$ ，由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $\widetilde{x}\in\mathcal{H}$ ，使

$$(\widetilde{x},\ y)=\int_{\mathbb{C}}f(\lambda)\mathrm{d}E_{(x,y)}(\lambda),\ \forall y\in\mathcal{H}\ .$$

且 $\|\widetilde{x}\|\leq\|(\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)})^{\frac{1}{2}}$. 这个 $\widetilde{x}$ 由 x 唯一确定，记为 $\widetilde{J}(f)x$. 这样得到定义在 D_f 上映射 $\widetilde{J}(f)$ 使

$$(\widetilde{J}(f)x,\ y)=\int_{\mathbb{C}}f(\lambda)\mathrm{d}E_{(x,y)}(\lambda),\ x\in D_f,\ y\in\mathcal{H}\ .$$

显然当 f 是有界 Borel 函数时，这和 IV.5 中定义的函数演算是一致的.

(a) 由 $E_(x,y)$ 关于 x 是线性的可见 $\widetilde{J}(f)$ 是线性的，而且

$$\|\widetilde{J}(f)x\|\leq(\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)})^{\frac{1}{2}}\ .$$

下面证明等式成立.

设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 f 之截断函数序列，则 f_n 是有界 Borel 函数， $D_{f_n}=\mathcal{H},\ D_{f-f_n}=D_f$. $\forall x\in D_f,\ \widetilde{J}(f-f_n)x=\widetilde{J}(f)x-\widetilde{J}(f_n)x$. 从而

$$\|\widetilde{J}(f)x-\widetilde{J}(f_n)x\|^2=\|\widetilde{J}(f-f_n)x\|^2\leq\int_{\mathbb{C}}|f-f_n|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}\to 0\ ,\tag{3.2}$$

当 $n\to\infty$. 上式最后极限是根据控制收敛定理及 $f_n\to f$ 得出的. 注意，由有界 Borel 函数演算，

$$\|\widetilde{J}(f_n)x\|^2=\int_{\mathbb{C}}|f_n|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}\ .$$

令 $n\to\infty$ ，根据 (3.2) 可得

$$\|\widetilde{J}(f)x\|^2=\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}\ .$$

这证明了 (a) . 至于是 $\widetilde{J}(f)$ 闭算子，待 (e) 证明之后即可得出.

(b) 设 $x\in D_f\cap D_g$ ，则 $f,g\in L^2(E_{(x,x)})$. 从而 $f+g\in L^2(E_{(x,x)})$. 故 $x\in D_{f+g}$. 又对任何 $y\in\mathcal{H}$

$$(\widetilde{J}(f)x,\ y)=\int_{\mathbb{C}}f(\lambda)\mathrm{d}E_{(x,y)}\ ,$$
$$(\widetilde{J}(g)x,\ y)=\int_{\mathbb{C}}g(\lambda)\mathrm{d}E_{(x,y)}\ ,$$
$$(\widetilde{J}(f+g)x,\ y)=\int_{\mathbb{C}}(f(\lambda)+g(\lambda))\mathrm{d}E_{(x,y)}\ .$$

可见， $(\widetilde{J}(f+g)x,\ y)=([\widetilde{J}(f)+\widetilde{J}(g)]x,\ y)$. 故 $\widetilde{J}(f+g)x=[\widetilde{J}(f)+\widetilde{J}(g)]x$. 总之,

$$\widetilde{J}(f)+\widetilde{J}(g)\subset\widetilde{J}(f+g)\ .$$

当 f,g 之一有界时， $\widetilde{J}(f),\widetilde{J}(g)$ 之一是有界线性算子，所以必有等式成立.

(c) 由假设，当 $x\in D_f\cap D_{f_n}$ ， $n=1,2,\cdots$ 时，对任何 $y\in\mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}&(\widetilde{J}(f_n)x,\ y)-(\widetilde{J}(f)x,\ y)\\ =\ &\int_{\mathbb{C}} f_n(\lambda)\mathrm{d}E_{(x,y)}-\int_{\mathbb{C}} f(\lambda)\mathrm{d}E_{(x,y)}=\int_{\mathbb{C}}[f_n(\lambda)-f(\lambda)]\mathrm{d}E_{(x,y)}.\end{aligned}$$

从而， $|(\widetilde{J}(f_n)x,\ y)-(\widetilde{J}(f)x,\ y)|\le\int_{\mathbb{C}}|f_n(\lambda)-f(\lambda)|\mathrm{d}|E_{(x,y)}|\to 0$. 故

$$\lim_{n\to\infty}(\widetilde{J}(f_n)x,\ y)=(\widetilde{J}(f)x,\ y)\ .$$

(d) 由无界算子定义域规定

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(g))&=\{x\in\mathcal{D}(\widetilde{J}(g));\ \widetilde{J}(g)x\in\mathcal{D}(\widetilde{J}(f))\}\\ &=\{x\in D_g;\ \widetilde{J}(g)x\in D_f\}.\end{aligned}$$

所以只须证

$$D_g\cap D_{fg}=\{x\in D_g;\ \widetilde{J}(g)x\in D_f\}\ .$$

设 f 是有界 Borel 函数，则 $D_g\subset D_{fg}$ ，若 $\forall x\in D_g$ ， $z\in\mathcal{H}$ ，令 $v=\widetilde{J}(\bar{f})z$ ，由引理 VI.3.1 ,

$$\begin{aligned}(\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(g)x,\ z)&=(\widetilde{J}(g)x,\ [\widetilde{J}(f)]^*z)=(\widetilde{J}(g)x,\ \widetilde{J}(\bar{f})z)\\ &=(\widetilde{J}(g)x,\ v)=\int_{\mathbb{C}} g\mathrm{d}E_{(x,v)}=\int_{\mathbb{C}} gf\mathrm{d}E_{(x,\,z)}\\ &=(\widetilde{J}(fg)x,\ z).\end{aligned}$$

可见

$$\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(g)x=\widetilde{J}(fg)x,\ \text{当}x\in D_g\ .$$

设 $y=\widetilde{J}(g)x$ ，则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(y,y)}&=\|\widetilde{J}(f)y\|^2=\|\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(g)x\|^2=\|\widetilde{J}(fg)x\|^2\\ &=\int_{\mathbb{C}}|fg|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}.\end{aligned}$$

对一般 Borel 函数 f ，设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 f 之截断函数序列，则是 f_n 有界 Borel 函数，且 $f_n\to f,\ n\to\infty$, 由已证 $\int_{\mathbb{C}}|f_n|^2\mathrm{d}E_{(y,y)}=\int_{\mathbb{C}}|f_ng|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}$. 又 $|f_n|^2\nearrow|f|^2$, $|f_ng|^2\nearrow|fg|^2$. 令 $n\to\infty$ ，由 Levi 定理,

$$\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(y,y)}=\int_{\mathbb{C}}|fg|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}\ .$$

这说明，对 $x\in D_g$ ，有

$$x\in D_{fg}\Leftrightarrow\widetilde{J}(g)x=y\in D_f\ .$$

故 $x\in D_f\cap D_{fg}\Leftrightarrow x\in D_g$且$\widetilde{J}(g)x=y\in D_f$. 又由于 $\widetilde{J}(f_n)\widetilde{J}(g)x=\widetilde{J}(f_ng)x,\ x\in D_f\cap D_{fg}$. 令 $n\to\infty$ ，由 (c) 得到

$$\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(g)x=\widetilde{J}(fg)x,\ x\in D_f\cap D_{fg}\ .$$

所以 $\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(g)\subset\widetilde{J}(fg)$.

(e) 任给 Borel 函数 f ，设 $x\in D_f$ ， $y\in D_{\overline{f}}=D_f$. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 f 之截断函数序列, 由有界 Borel 函数演算,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} f_n\mathrm{d}E_{(x,y)}&=(\widetilde{J}(f_n)x,\ y)=(x,\ [\widetilde{J}(f_n)]^*y)=\overline{(\widetilde{J}(\bar{f}_n)y,\ x)}\\ &=\overline{\int_{\mathbb{C}}\bar{f}_n\mathrm{d}E_{(y,x)}}.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 由 (c) 可得 $\int_{\mathbb{C}} f\mathrm{d}E_{(x,y)}=\overline{\int_{\mathbb{C}}\bar{f}\mathrm{d}E_{(y,x)}}$. 即 $(\widetilde{J}(f)x,\ y)=\overline{(\widetilde{J}(\bar{f})y,\ x)}=(x,\ \widetilde{J}(\bar{f})y)$. 这表明 $y\in\mathcal{D}([\widetilde{J}(f)]^*)$ ，且 $[\widetilde{J}(f)]^*y=\widetilde{J}(\bar{f})y$ ，故 $\widetilde{J}(\bar{f})\subset[\widetilde{J}(f)]^*$.

设 $z \in \mathcal{D}([\widetilde{J}(f)]^*)$ ，往证 $z \in \mathcal{D}(\widetilde{J}(\bar{f})) = D_{\bar{f}} = D_f$ ，即

$$\int_{\mathbb{C}} |f|^2 \mathrm{d}E_{(z,z)} < \infty .$$

令 $v = [\widetilde{J}(f)]^* z$ ，考虑截断函数 $f_n = f\varphi_n,\ \|\varphi_n\|_\infty \le 1,\ n = 1,\ 2,\ \cdots$ ，由已证 (d) ， $\widetilde{J}(f_n) = \widetilde{J}(f)\widetilde{J}(\varphi_n),\ \widetilde{J}(\varphi_n)$ 是有界自伴算子. 由命题 VI.1.8 ,

$$\begin{aligned}\widetilde{J}(\bar{f}_n) = [\widetilde{J}(f)]^* &= [\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(\varphi_n)]^* \supset [\widetilde{J}(\varphi_n)]^*[\widetilde{J}(f)]^* \\ &= \widetilde{J}(\varphi_n)[\widetilde{J}(f)]^*.\end{aligned}$$

这样

$$\widetilde{J}(\varphi_n)v = \widetilde{J}(\varphi_n)[\widetilde{J}(f)]^* z = \widetilde{J}(\bar{f}_n)z .$$

而

$$\int_{\mathbb{C}} |f|^2 \mathrm{d}E_{(z,z)} = \|\widetilde{J}(\bar{f}_n)z\|^2 = \|\widetilde{J}(\varphi_n)v\|^2 \le \|\widetilde{J}(\varphi_n)\|^2\|v\|^2 \le \|v\|^2 .$$

令 $n \to \infty$, 可见 $\int_{\mathbb{C}} |f|^2 \mathrm{d}E_{(z,z)} \le \|v\|^2 < +\infty$, 即 $z \in D_f = D_{\bar{f}} = \mathcal{D}(\widetilde{J}(\bar{f}))$, 故 $\widetilde{J}(\bar{f} = [\widetilde{J}(f)]^*$.

设 $x \in D_{|f|^2}$ ，则 $\int_{\mathbb{C}} |f|^4 \mathrm{d}E_{(x,x)} < +\infty$ ，于是

$$\int_{\mathbb{C}} |f|^2 \mathrm{d}E_{(x,x)} \le (\int_{\mathbb{C}} |f|^4 \mathrm{d}E_{(x,x)})^{\frac{1}{2}} (\int_{\mathbb{C}} 1 \mathrm{d}E_{(x,x)})^{\frac{1}{2}} < +\infty .$$

可见 $x \in D_f$ ，于是 $D_{|f|^2} \subset D_f$. 由已证 (d) ,

$$[\widetilde{J}(f)]^*\widetilde{J}(f) = \widetilde{J}(\bar{f})\widetilde{J}(f) = \widetilde{J}(\bar{f}f) = \widetilde{J}(|f|^2) .$$

同理可证另一等式. ◇

推论 VI.3.3 *在定理 VI.3.2 中，* $D_f = \mathcal{H}$ *当且仅当* $f \in L^\infty(E)$ *，这里* $L^\infty(E)$ *表示* $\mathbb{C}$ *上全体* E *本性有界 Borel 函数.*

证明 必要性 由定理 VI.3.2 ， $\widetilde{J}(f)$ 是闭算子. 若 $\mathcal{D}(\widetilde{J}(f)) = D_f = \mathcal{H}$ ，根据闭图形定理， $\widetilde{J}(f)$ 是有界算子. 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 f 之截断函数序列，则

$$f_n = f\varphi_n,\ \|\varphi_n\|_\infty \le 1,\ n = 1,\ 2,\ \cdots .$$

由定理 VI.3.2 (b) ， $\widetilde{J}(f_n) = \widetilde{J}(f)\widetilde{J}(\varphi_n),\ n = 1,\ 2,\ \cdots$ ，则

$$\|f_n\|_\infty = \|\widetilde{J}(f_n)\| = \|\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(\varphi_n)\| \le \|\widetilde{J}(f)\|\,\|\widetilde{J}(\varphi_n)\| = \|\widetilde{J}(f)\| .$$

令 $n \to \infty$ ，可见 $\|f\|_\infty \le \|\widetilde{J}(f)\|$ ，即 $f \in L^\infty(E)$.

充分性是显然的. ◇

定理 VI.3.4 *设* $E : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{P}$ *是射影值测度，* f *是* $\mathbb{C}$ *上 Borel 函数，* $E-$ *几乎处处取有限值，* $\alpha \in \mathbb{C}$ *. 令* $S_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C};\ f(\lambda) = \alpha\}$ *. 则* S_α *是* $\mathbb{C}$ *中 Borel 集合，且*

(a) *若* $\alpha \in \mathrm{essRan} f$ *且* $E(S_\alpha) \ne 0$ *，则* $\widetilde{J}(f) - \alpha I$ *不是单射的.*

(b) *若* $\alpha \in \mathrm{essRan} f$ *且* $E(S_\alpha) = 0$ *，则* $\widetilde{J}(f) - \alpha I$ *是单射的，但存在单位向量* $x_n \in D_f,\ n = 1,\ 2,\ \cdots$ *，使* $\|[\widetilde{J}(f) - \alpha I]x_n\| \to 0$ *，当* $n \to \infty$ *.*

(c) $\sigma(\widetilde{J}(f)) = \mathrm{essRan} f$*.*

注意，如果对任何 $N \in \mathbb{N}$ ，都有 $E(\{x \in \mathbb{C} : |f(x)| > N\}) \ne 0$ ，则记为 $\infty \in \mathrm{essRan}\, f$. 易见， $\infty \in \mathrm{essRan}\, f$ 当且仅当 f 不是本性有界函数.

证明 不失一般性，可设 $\alpha = 0$.

(a) 由 $E(S_0) \ne 0$ ，存在单位向量 $x_0 \in E(S_0)\mathcal{H}$. 设 $\varphi = \chi_{S_0}$ ，则 $f\varphi = 0$ ，从而 $\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(\varphi) = \widetilde{J}(f\varphi) = 0$. 又 $\widetilde{J}(\varphi) = \widetilde{J}(\chi_{S_0}) = E(S_0)$ ，这样 $\widetilde{J}(\varphi)x_0 = E(S_0)x_0 = x_0 \ne 0$. 但是

$$\widetilde{J}(f)x_0 = \widetilde{J}(f)\widetilde{J}(\varphi)x_0 = 0 .$$

所以 $\widetilde{J}(f)$ 不是单射.

(b) 设 $x \in D_f$ ，使 $\widetilde{J}(f)x = 0$ ，则由定理 VI.3.2 (a) ,

$$\begin{aligned} 0=\|\widetilde{J}(f)x\|^2 &= (\widetilde{J}(f)x,\ \widetilde{J}(f)x)=([\widetilde{J}(f)]^*\widetilde{J}(f)x,\ x) \\ &= (\widetilde{J}(\bar{f})\widetilde{J}(f)x,\ x)=\int_{\mathbb{C}}|f|^2\mathrm{d}E_{(x,x)}. \end{aligned}$$

但 $E(S_0)=0$，从而 $E_{(x,x)}(S_0)=0$．于是

$$|f|>0,\ E_{(x,x)}\ \text{a. e. 于}\ \mathbb{C}\ .$$

由上式只有 $E_{(x,x)}(\mathbb{C})=0$．

而 $E_{(x,x)}(\mathbb{C})=(E(\mathbb{C})x,\ x)=\|x\|^2$．故 $x=0$，即 $\widetilde{J}(f)$ 是单射.

令 $F_n=\{\lambda\in\mathbb{C};\ |f(\lambda)|<\frac{1}{n}\},\ n=1,\ 2,\ \cdots$，由 $0\in\mathrm{essRan}f$，可见 $E(F_n)>0,\ n=1,\ 2,\ \cdots$．取向量 $x_n\in E(F_n)\mathcal{H},\ \|x_n\|=1,\ n=1,\ 2,\ \cdots$．设 $\varphi_n=\chi_{F_n},\ n=1,\ 2,\ \cdots$，则 $f\varphi_n$ 是有界 Borel 函数，且 $\|f\varphi_n\|_\infty\le\frac{1}{n},\ \widetilde{J}(f)\widetilde{J}(\varphi_n)=\widetilde{J}(f\varphi_n)$．注意 $\widetilde{J}(\varphi_n)x_n=E(F_n)x_n=x_n\in\mathcal{D}(\widetilde{J}(f)),\ n=1,\ 2,\ \cdots$．于是

$$\begin{aligned} \|\widetilde{J}(f)x_n\| &= \|\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(\varphi_n)x_n\|=\|\widetilde{J}(f\varphi_n)x_n\| \\ &\le \|\widetilde{J}(f\varphi_n)\|\le\|f\varphi_n\|_\infty\le\tfrac{1}{n}\to 0,\ \text{当}n\to\infty. \end{aligned}$$

(c) 由 (a)，(b) 可见 $\sigma(\widetilde{J}(f))\supset\mathrm{essRan}f$．只须证，若 $0\notin\mathrm{essRan}f$，则 $0\notin\sigma(\widetilde{J}(f))$．

由 $0\notin\mathrm{essRan}f$，则 $g=\frac{1}{f}\in L^\infty(E)$，而且 $fg=gf=1$．由定理 VI.3.2 (d)，

$$\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(g)=\widetilde{J}(fg)=\widetilde{J}(1)=I\ ,$$

$$\widetilde{J}(g)\widetilde{J}(f)=\widetilde{J}(gf)=\widetilde{J}(1)=I\ .$$

又 $\widetilde{J}(g)\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$，故 $0\in\rho(\widetilde{J}(f))$． ◇

定理 VI.3.5 *(测度转换原理) 设 $\Omega,\ \Omega'$ 都是 $\mathbb{C}$ 是上 Borel 集合，$\mathcal{B}$，$\mathcal{B}'$ 分别是 $\Omega,\ \Omega'$ 之全体 Borel 子集．设 $E:\ \mathcal{B}\to\mathcal{P}$ 是射影值测度，$E(\Omega)=I$．映射 $\varphi:\ \Omega\to\Omega'$ 使*

$$\varphi^{-1}(S')\in\mathcal{B},\ \forall S'\in\mathcal{B}'\ .$$

令 $E'(S')=E(\varphi^{-1}(S'))$，则 $E':\ \mathcal{B}'\to\mathcal{P}$ 是射影值测度，$E'(\Omega')=I$ 且

$$\int_{\Omega'}f\mathrm{d}E'_{(x,y)}=\int_\Omega(f\circ\varphi)\mathrm{d}E_{(x,y)}\ . \tag{3.3}$$

对使上述两端积分都存在的任何 Borel 函数 $f:\ \Omega'\to\mathbb{C}$ 都成立.

证明 首先需要证明 E' 是强可数可加的，设 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}S'_k=S'$，且当 $j\ne k$时，$S'_k\cap S'_j=\emptyset$．令 $S_k=\varphi^{-1}(S'_k),\ k=1,\ 2,\ \cdots$，$S=\varphi_{-1}(S')$，则 $S_k,\ S\in\mathcal{B},\ k=1,\ 2,\ \cdots$，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}S_k=S$，且当 $j\ne k$时，$S_k\cap S_j=\emptyset$．于是由 E 之强可数可加性知，

$$E'(S')x=E(S)x=\sum_{k=1}^{\infty}E(S_k)x=\sum_{k=1}^{\infty}E'(S'_k)x,\ \forall x\in\mathcal{H}\ .$$

可见 E' 是强可数可加的.

又由 $\Omega=\varphi^{-1}(\Omega')$，可见 $E'(\Omega')=E(\Omega)=I$．对任何 $S'\in\mathcal{B}'$，记 $S=\varphi^{-1}(S')$，则 $\chi_{S'}\circ\varphi=\chi_S$．而

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'}\chi_{S'}\mathrm{d}E'_{(x,y)} &= (E'(S')x,\ y)=(E(\varphi^{-1}(S'))x,\ y)=(E(S)x,\ y) \\ &= \int_\Omega\chi_S\mathrm{d}E_{(x,y)}=\int_\Omega\chi_{S'}\circ\varphi\mathrm{d}E_{(x,y)}. \end{aligned}$$

于是 (3.3) 对任何简单函数都成立．而任何 Borel 函数总是可表为简单函数的极限，由控制收敛定理可知 (3.3) 对任何两端积分存在之 Borel 函数 f 亦成立. ◇

VI.4 自伴算子谱定理

设 A 是 $\mathcal{H}$ 内无界自伴算子，有推论 VI.2.3，$(A\pm iI)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$，且

$$\|(A \pm iI)x\|^2 = \|A\|^2 + \|x\|^2,\ 当 x \in \mathcal{D}(A) .$$

令

$$U((A+iI)x) = (A-iI)x,\ 当 x \in \mathcal{D}(A) .$$

则 U 是等距，而且 $\mathcal{D}(U) = \mathcal{D}(A+iI) = \mathcal{H}$, $\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(A-iI) = \mathcal{H}$ ，从而 U 是 $\mathcal{H}$ 上酉算子. 令 $y = (A+iI)x$ ，则 $x = (A+iI)^{-1}y$ ，上式可写成

$$Uy = (A-iI)(A+iI)^{-1}y,\ y \in \mathcal{H} .$$

即

$$U = (A-iI)(A+iI)^{-1} .$$

称如此定义得酉算子 U 为 A 之 Cayley 变换 .

关于 A 与其 Cayley 变换间有如下关系.

命题 VI.4.1 设 A 是 $\mathcal{H}$ 内自伴算子，则

(i) $U = (A-iI)(A+iI)^{-1}$ 是 $\mathcal{H}$ 上酉算子.

(ii) $I-U$ 是单射， $\mathcal{R}(I-U) = \mathcal{D}(A)$ ，即 $(I-U)^{-1}$ 是稠定义的.

(iii) $A = i(I+U)(I-U)^{-1}$ ，即 A 是 U 之逆变换.

证明 (i) 已经证明.

(ii) 注意 $(A+iI)(A+iI)^{-1} = I$ ，

$$\begin{aligned} I-U &= (A+iI)(A+iI)^{-1} - (A-iI)(A+iI)^{-1} \\ &= [(A+iI)-(A-iI)](A+iI)^{-1} = 2i(A+iI)^{-1}. \end{aligned}$$

这说明 $I-U$ 是单射，且 $\mathcal{R}(I-U) = \mathcal{R}((A+iI)^{-1}) = \mathcal{D}(A)$.

(iii) 由 $I-U = 2i(A+iI)^{-1}$ ，可见 $(I-U)^{-1}$ 存在，且是稠定义的闭算子 $\frac{1}{2i}(A+iI)$. 即 $\mathcal{D}((I-U)^{-1}) = \mathcal{D}(A)$. 注意

$$I+U = (A+iI)(A+iI)^{-1} + (A-iI)(A+iI)^{-1} = 2A(A+iI)^{-1}$$

是有界的，这样

$$i(I+U)(I-U)^{-1} = i2A(A+iI)^{-1}\tfrac{1}{2i}(A+iI) \subset A .$$

又 $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}((I-U)^{-1}) = \mathcal{D}(i(I+U)(I-U)^{-1})$ ，故 $A = i(I+U)(I-U)^{-1}$. ◇

定理 VI.4.2 设 A 是 $\mathcal{H}$ 内自伴算子，则存在 $\mathcal{B}^{(1)}$ 上唯一的射影测度 E : $\mathcal{B}^{(1)} \to \mathcal{P}$ 使

$$(Ax,\ y) = \int_{\mathbb{R}} t\mathrm{d}E_{(x,y)}(t),\ \forall x \in \mathcal{D}(A),\ y \in \mathcal{H} ,$$

而且 $E(\sigma(A)) = I$.

如此之 E 称为 A 的 谱测度 或 谱分解 .

证明 考虑 A 之 Cayley 变换 $U = (A-iI)(A+iI)^{-1}$. 由命题 VI.4.1 ， U 是 $\mathcal{H}$ 上酉算子，自然是正规算子. 由正规算子谱定理，必存在 E^U : $\mathcal{B}^{(2)} \to \mathcal{P}$ 使

$$(Ux,\ y) = \int_{|\lambda|=1} \lambda \mathrm{d}E^U_{(x,y)}(\lambda),\ \forall x,\ y \in \mathcal{H} ,$$

且 $E^U(\sigma(U)) = I$. 由于 $I-U$ 是单射，故 $1 \notin \sigma_p(U)$ ，从而 $E^U(\{1\}) = 0$. 令 $\Omega^U = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1,\ 但 \lambda \neq 1\}$ ，则上式可写为

$$(Ux,\ y) = \int_{\Omega^U} \lambda \mathrm{d}E^U_{(x,y)}(\lambda),\ \forall x,\ y \in \mathcal{H} . \tag{4.1}$$

设 $\mathcal{B}^U$ 表示 Ω^U 中全体 Borel 集合，定义 Ω^U 上函数

$$\phi(\lambda) = i\tfrac{1+\lambda}{1-\lambda},\ \lambda \in \Omega^U .$$

易见 ϕ 是 Ω^U 上处处取有限实值的 Borel 函数. 由定理 VI.3.2 ， D_ϕ 是 $\mathcal{H}$ 中稠子空间，存在闭算子 $\widetilde{J}(\phi)$ ，使 $\mathcal{D}(\widetilde{J}(\phi)) = D_\phi$ ，且

$$(\widetilde{J}(\phi)x,\ y)=\int_{\Omega^U}\lambda \mathrm{d}E^U_{(x,y)}(\lambda),\ \forall x\in D_\phi,\ y\in\mathcal{H}\ .$$

由 ϕ 是实值的可知 $\widetilde{J}(\phi)$ 是自伴的，注意

$$\phi(\lambda)(1-\lambda)=i(1+\lambda),\ \lambda\in\Omega^U\ .$$

由定理 VI.3.2，有 $\widetilde{J}(\phi)(I-U)=i(I+U)$. 这说明 $\mathcal{R}(I-U)\subset\mathcal{D}(\widetilde{J}(\phi))$. 由命题 VI.4.1 (ii)，$\mathcal{D}(A)=\mathcal{R}(I-U)\subset\mathcal{D}(\widetilde{J}(\phi)),\ \forall x\in\mathcal{D}(A)$ ，有 $y\in\mathcal{H}$ ，使 $x=(I-U)y$. 于是由命题 VI.4.1 (iii)，

$$Ax=A(I-U)y=i(I+U)y=\widetilde{J}(\phi)(I-U)y=\widetilde{J}(\phi)x\ .$$

可见， $\widetilde{J}(\phi)$ 是 A 之自伴扩张. 这样

$$(Ax,\ y)=(\widetilde{J}(\phi)x,\ y)=\int_{\Omega^U}\lambda \mathrm{d}E^U_{(x,y)}(\lambda),\ \forall x\in\mathcal{D}(A),\ y\in\mathcal{H}\ .$$

注意映射 $\phi:\ \Omega^U\to\mathbb{R}$ 使 $\forall S\in\mathcal{B}^{(1)},\ \phi^{-1}(S)\in\mathcal{B}^U$. 令

$$E(S)=E^U(\phi^{-1}(S)),\ 当S\in\mathcal{B}^{(1)}\ .$$

由测度转换原理 (定理 VI.3.5) 可知 $E:\ \mathcal{B}^{(1)}\to\mathcal{P}$ 是射影值测度，而且

$$\int_{\mathbb{R}} t\mathrm{d}E_{(x,y)}(t)=\int_{\Omega^U}\lambda \mathrm{d}E^U_{(x,y)}(\lambda),\ \forall x\in\mathcal{D}(A),\ y\in\mathcal{H}\ .$$

故

$$(Ax,\ y)=\int_{\mathbb{R}} t\mathrm{d}E_{(x,y)}(t),\ \forall x\in\mathcal{D}(A),\ y\in\mathcal{H}\ .$$

由定理 VI.3.4， $\sigma(A)=\mathrm{essRan}\phi$. 往证 $\sigma(A)=\phi(\sigma(U))$.

首先，假设 $t_0\in\sigma(A)$ ，若 $t_0\notin\phi(\sigma(U))$ ，注意 $\phi(\sigma(U))$ 是闭集，存在 $\epsilon>0$ ，使 $U(t_0,\epsilon)\triangleq\{t;\ |t-t_0|<\epsilon\}$ 满足 $U(t_0,\epsilon)\cap\phi(\sigma(U))=\emptyset$ ，于是

$$\{\lambda\in\mathbb{C};\ |\phi(\lambda)-t_0|<\epsilon\}\cap\sigma(U)=\emptyset\ .$$

从而由 $E(\sigma(U))=I$ ，可知 $E\{\lambda\in\mathbb{C};\ |\phi(\lambda)-t_0|<\epsilon\}=0$. 这和 $t_0\in\sigma(A)=\mathrm{essRan}\phi$ 矛盾. 故 $\sigma(A)\subset\phi(\sigma(U))$.

反之，假若 $t_0\in\phi(\sigma(U))$ ，则有 $\lambda_0\in\sigma(U)$ ，使 $t_0=\phi(\lambda_0)$ ，于是 $\lambda_0=\phi^{-1}(t_0)=\frac{t_0-i}{t_0+i}$. 从而

$$\begin{aligned} U-\lambda_0 I &= (A-iI)(A+iI)^{-1}-(t_0-i)(t_0+i)^{-1}\\ &= (t_0+i)^{-1}[(t_0+i)(A-iI)-(t_0-i)(A+iI)](A+iI)^{-1}\\ &= (t_0+i)^{-1}2i(A-t_0I)(A+iI)^{-1}. \end{aligned}$$

如果 $t_0\notin\sigma(A)$, 由上式可见 $U-\lambda_0 I$ 是单射而且是满射. 这和 $\lambda_0\in\sigma(U)$ 矛盾, 故 $t_0\in\sigma(A)$. 即 $\sigma(A)\supset\phi(\sigma(U))$. 总之 $\sigma(A)=\phi(\sigma(U))$, 即 $\sigma(U)=\phi^{-1}(\sigma(A))$ 这样 $E(\sigma(A))=E^U(\sigma(U))=I$.

至于唯一性，假设又有射影值测度 $E':\ \mathcal{B}^{(1)}\to\mathcal{P}$ 使

$$(Ax,\ y)=\int_{\mathbb{R}} t\mathrm{d}E'_{(x,y)}(t),\ \forall x\in\mathcal{D}(A),\ y\in\mathcal{H}\ .$$

$\phi^{-1}:\ \mathbb{R}\to\Omega^U$ 是 $\mathbb{R}$ 上有界 Borel 函数，由定理 VI.3.2，

$$(Ux,\ y)=\int_{\mathbb{R}}\phi^{-1}(t)\mathrm{d}E'_{(x,y)}(t),\ \forall x,\ y\in\mathcal{H}\ .$$

任给一个 Ω^U 中 Borel 集 S' ， $\phi(S')$ 是 $\mathbb{R}$ 中 Borel 集，令

$$F^U(S')=E'(\phi(S'))\ ,\quad S'\in\mathcal{B}^U\ ,$$

则 $F^U:\ \mathcal{B}^U\to\mathcal{P}$ 是射影值测度. 由测度转换定理

$$\int_{\Omega^U}\lambda \mathrm{d}F^U_{(x,y)}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}\phi^{-1}(t)\mathrm{d}E'_{(x,y)}(t),\ \forall x,\ y\in\mathcal{H}\ .$$

这样

$$(Ux,\ y)=\int_{\Omega^U}\lambda \mathrm{d}F^U_{(x,y)}(\lambda),\ \forall x,\ y\in\mathcal{H}\ . \tag{4.2}$$

根据正规算子谱定理，射影值测度是唯一的，知 $E^U = F^U$. 注意 $E'(S) = F^U(\phi^{-1}(S)),\ \forall S \in \mathcal{B}^{(1)}$ ，所以 $E = E'$. ◇

作为自伴算子谱定理的应用，我们来看一个例子. 像有界自伴算子情形一样，引进如下概念.

定义 VI.4.1 设 A 是 $\mathcal{H}$ 内自伴算子，若 $(Ax,\ x) \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{D}(A)$ ，则称 A 为 正算子 ，记为 $A \geq 0$.

以下为方便，记 $\mathbb{R}^+ = [0,\ \infty),\ \mathbb{R}^- = (\infty,\ 0),\ \mathcal{B}^{(1)}(\mathbb{R}^+)$ 表示 $\mathbb{R}^+$ 中全体 Borel 集合的 Borel 代数.

命题 VI.4.3 设 A 是 $\mathcal{H}$ 内自伴算子，则

(a) $A \geq 0 \Leftrightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$.

(b) 若 $A \geq 0$ ，则存在唯一正算子 B ，使 $B^2 = A$ ，即正算子有唯一正平方根.

证明 (a) $\Rightarrow$ 由推论 VI.2.3 . $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. 于是只须证 $\forall t < 0$ ，必有 $t \in \rho(A)$. 注意 $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ ，

$$\begin{aligned}\|(A-tI)x\|^2 &= ((A-tI)x,\ (A-tI)x) \\ &= (Ax,\ Ax) - t(Ax,\ x) - t(x,\ Ax) + t^2(x,\ x) \\ &= \|Ax\|^2 + t^2\|x\|^2 - 2t(Ax,\ x).\end{aligned}$$

因 $t < 0,\ (Ax,\ x) \geq 0$ ，故

$$\|(A-tI)x\|^2 \geq \|Ax\|^2 + t^2\|x\|^2,\ \forall x \in \mathcal{D}(A)\ . \tag{4.3}$$

这表明 $A - tI$ 是单射的，又

$$\overline{\mathcal{R}(A-tI)} = \overline{\mathcal{R}((A-tI)^*)} = \mathcal{N}(A-tI)^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}\ .$$

可知 $A - tI$ 是稠值域的，往证 $\mathcal{R}(A-tI)$ 是闭的. 设 $x_n \in \mathcal{D}(A)$ ，使 $(A-tI)x_n \to y$ ，由 (4.3) ，可见 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列. 故有 $x_n \to x_0$ ，而 $A - tI$ 是闭算子，可知 $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ ，且 $(A-tI)x_0 = y$ ，即 $\mathcal{R}(A-tI) = \overline{\mathcal{R}((A-tI))} = \mathcal{H}$. 从而 $(A-tI)^{-1}$ 是 $\mathcal{H}$ 上处处定义的闭算子. 由闭图形定理，可知 $(A-tI)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ，故 $t \in \rho(A)$.

" $\Leftarrow$ " 若 $\sigma(A) \subset [0,\ \infty)$ ，由定理 VI.4.2 ， $E(\sigma(A)) = I$. 于是 $E(\mathbb{R}^-) = 0$. $\forall x \in \mathcal{H},\ E_{(x,x)}(\mathbb{R}^-)$ ，故

$$(Ax,\ x) = \int_{\mathbb{R}} t\mathrm{d}E_{(x,x)}(t) = \int_{\mathbb{R}^+} t\mathrm{d}E_{(x,x)}(t) \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{D}(A)\ .$$

(b) 由定理 VI.4.2 ，存在射影值测度 $E:\ \mathcal{B}^{(1)} \to \mathcal{P}$ 使

$$(Ax,\ y) = \int_{\mathbb{R}} t\mathrm{d}E_{(x,y)}(t),\ \forall x \in \mathcal{D}(A),\ y \in \mathcal{H}\ .$$

因 $A \geq 0$ ，由 (a) ， $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$. 于是 $E(\mathbb{R}^-) = 0$ ，从而 $E:\ \mathcal{B}^{(1)}(\mathbb{R}^+) \to \mathcal{P}$ ，而且

$$(Ax,\ y) = \int_{\mathbb{R}^+} t\mathrm{d}E_{(x,y)}(t) = \int_0^{+\infty} t\mathrm{d}E_{(x,y)}(t),\ \forall x \in \mathcal{D}(A),\ y \in \mathcal{H}\ .$$

设 $\phi(t) = t,\ f(t) = \sqrt{t},\ t \in [0,\ \infty)$ ，则 $f \geq 0$ ，且 $f^2 = \phi$. 由定理 VI.3.2 (d) ，

$$\widetilde{J}(f)\widetilde{J}(f) = \widetilde{J}(\phi) = A\ .$$

令 $\widetilde{J}(f) = B$ ，则 $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B) = D_f$ ，

$$(Bx,\ x) = (\widetilde{J}(f)x,\ x) = \int_0^{+\infty} t\mathrm{d}E_{(x,x)}(t) \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{D}(B)\ .$$

故 $B \geq 0$ ，且 $B^2 = A$.

往证唯一性. 若又有正算子 C ，使 $C^2 = A$ ，则 $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(C)$. 设 $E^C:\ \mathcal{B}^{(1)}(\mathbb{R}^+) \to \mathcal{P}$ 是 C 之射影值测度，使

$$(Cx,\ y) = \int_0^{+\infty} v\mathrm{d}E_{(x,\ y)}(v),\ \forall v \in \mathcal{D}(C)\ .$$

取 $\Omega = \Omega' = \mathbb{R}^+$ ，令 $\varphi(v) = v^2,\ \phi(v) = v,\ v \in \mathbb{R}^+$ ，则 $\varphi = \phi^2$ ．又令

$$E'(S) = E^C(\varphi^{-1}(S)),\ S \in \mathcal{B}^{(1)}(\mathbb{R}^+)\ .$$

由测度转换原理

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t \mathrm{d}E'_{(x,\ y)}(t) &= \int_0^{+\infty} v^2 \mathrm{d}E^C_{(x,\ y)}(v) \\ &= (\widetilde{J}(\varphi)x,\ y) = (\widetilde{J}(\phi)\widetilde{J}(\phi)x,\ y) \\ &= (C^2x,\ y) = (Ax,\ y),\ x \in \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

故 $E' :\ \mathcal{B}^{(1)}(\mathbb{R}^+) \to \mathcal{P}$ 是 A 之射影值测度，于是 $E' = E$ ．这样

$$E^C(S) = E'(\varphi(S)) = E(\varphi(S)),\ \forall S \in \mathcal{B}^{(1)}(\mathbb{R}^+)\ .$$

进而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |\psi|^2(v) \mathrm{d}E^C_{(x,x)}(v) &= \int_0^{+\infty} |\varphi|(v) \mathrm{d}E^C_{(x,x)}(v) = \int_0^{+\infty} t \mathrm{d}E_{(x,x)}(t) \\ &= \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}E_{(x,x)}(t). \end{aligned}$$

可见， $x \in D_\psi$ 当且仅当 $x \in D_f$ ，即 $x \in \mathcal{D}(C) \Leftrightarrow x \in \mathcal{D}(B)$ ．又由测度转换原理，

$$\begin{aligned} (Cx,\ y) &= \int_0^{+\infty} v \mathrm{d}E^C_{(x,\ y)}(v) = \int_0^{+\infty} \varphi^{-1}(t) \mathrm{d}E_{(x,\ y)}(t) \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{d}E_{(x,\ y)}(t) = (\widetilde{J}(f)x,\ y) = (Bx,\ y), \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathcal{D}(B)$ ， $y \in \mathcal{H}$ ．所以 $C = B$ ． ◇

参考文献

[1] 王振鹏， *泛函分析* ，吉林大学出版社， 1990.

[2] 江泽坚，孙善利， *泛函分析* ，高等教育出版社， 1994.

[3] J. L. 凯莱， *一般拓扑学* ，科学出版社， 1985 ，吴从炘、吴让泉译.

[4] N. Dunford ， J. T. Schwartz ， *Linear Operators, Part I, General Theory* ， John Wiley & Sons, 1957.

[5] W. Rudin ， *Real and Complex Analysis* ， McGraw-Hill Book Company ， 1987.